EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

30e JAARGANG 1954/55

III

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (*f* 12,50) zijn ingetekend, betalen *f* 6,75.

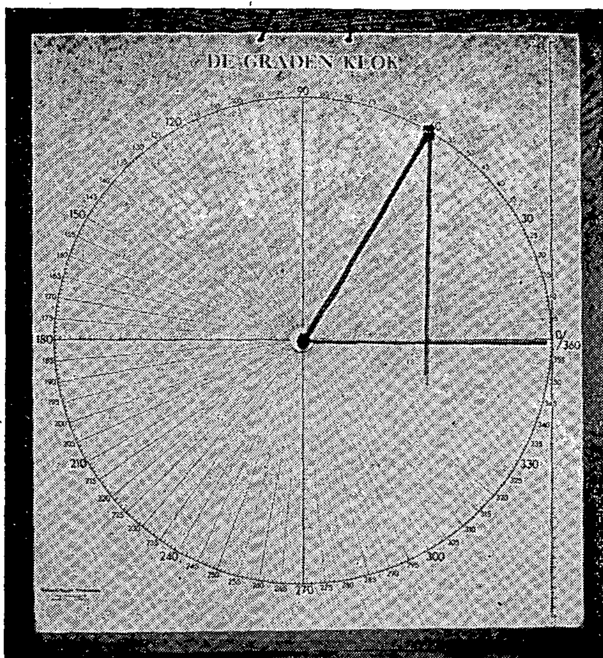
De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep Liwenagel te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van Wimecos storten hun contributie, die met ingang van 1 September 1953 gewijzigd is in *f* 6,— per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam (hierin zijn de abonnementskosten op Euclides begrepen). De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 10,— per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107III, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Oranje Nassauplein 15, Zeist. Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

INHOUD:



DE GRADEN KLOK

Afmetingen 59 × 64 cm. Blanke houten lijst. Metalen wijzers. Tweede verbeterde uitgave.

Gunstig beoordeeld o.a. door de bekende wiskundige P. Wijdenes.

Reeds geleverd in Nederland aan de volgende typen scholen:

Gymnasium, Lyceum, Hogere Burger School (ook voor Meisjes), Middelbaar Technische School, Kweekschool voor Onderwijzers, Ulo-school.

Twee wijzers kunnen *onafhankelijk van elkaar* om de as draaien. Aan één ervan zit met een stelschroef een *losse wijzer* bevestigd, die losgeschroefd dus *steeds verticaal* hangt als de Graden klok hangt of staat. De cirkelomtrek is in 360° verdeeld. Op de stralen van 0, 90, 180 en 270 graden is een cm verdeling aangebracht. De middellijn is 49 cm.

De **GRADENKLOK** blijkt in de practijk vooral nuttige diensten te bewijzen bij het onderwijs in de **goniometrie.** Stellen wij de straal = 1, dan is (zie afbeelding 1e kwadrant) de verticale rechthoekszijde de **sinus,** de horizontale de **cosinus. Al draaiende** met de bovenste wijzer van 0° tot 90°, **ziet** de leerling de sinus groeien en de cosinus afnemen, resp. van 0—1 en van 1—0.

Door de losse wijzer met de stelschroef vast te zetten in het verlengde van de bovenste wijzer wordt op de **tangenslijn** de toeneming van de **tangens** zichtbaar van 0 tot ∞. Eenvoudig is bij draaiing van de wijzers na te gaan, wanneer in de 4 kwadranten de verhoudingen + of — zijn. Enz.

De leraar zal een en ander gemakkelijk kunnen uitwerken. Ook kan de **leerling** door **zelfexperimenteren** zich **duidelijke begrippen** eigen kunnen maken. Veel tekenen door leraar en leerling wordt onnodig.

Natuurlijk kunnen ook eenvoudige wiskundige begrippen, bijv. over complement en supplement, over bijzonderheden bij hoeken van 30, 45 en 60, over regelmatige veelhoeken in een cirkel, enz. worden gedemonstreerd.

Bestelt U ook een exemplaar? S.v.p. rechtstreekse bestelling aan: **HOLLAND EXPORT ASSOCIATION,** Burg. Martenssingel 51, **GOUDA.**

E. M. Turner schrijft over een mathematische één-acter: „*The mathematics news*".

Ph. S. Jones vervolgt zijn historisch artikel over „*Complex numbers*". Hij reproduceert o.a. de titelpagina van het werk waarin de Noorse landmeter Caspar Wessel in 1798 de twee-dimensionale afbeelding der complexe getallen gaf, die meestal op naam staat van Gauss, die echter zijn theorie pas in 1832 publiceerde.

C. B. Read wijst op „*An interesting paradox*", die men bij tal van statistische tellingen kan tegenkomen. Als het aantal employés van een firma in drie groepen uiteenvalt en men gaat na, wie er contribuant zijn van een bepaald fonds, dan is het mogelijk dat in een bepaald jaar in elk der drie groepen een teruggang van het aantal contribuanten en bij de drie groepen gezamenlijk een toename van het aantal contribuanten valt waar te nemen! Deze paradox wijst ons op moeilijkheden in het bijbrengen van het juiste begrip inzake procenten!

V. Thébault behandelt eigenschappen van „*Parallelogram and parallelepiped*".

W. L. Schaaf vervolgt zijn „References for mathematic teachers" met 6 kolommen litteratuur over „*Probability, gambling, and game strategy*".

Enkele andere bijdragen:

a. „*How I teach understanding of definition*", door E. Nichols;
b. „*How I teach analysis of verbal problems*", door R. Henderson;
c. „*Materials available for counseling in mathematics*", door I. M. Bernard;
d. „*Common goals of mathematics teachers and of the National Council*", door J. R. Mayor;
e. „*Reviews and evaluations*".

The Mathematics Teacher, Volume XLVII, number five; May 1954; Iowa.

Dit inhoudrijke nummer bevat interessante didactische bijdragen onder de verzameltitel: „*Which way mathematics*", t.w.:

a. „*Issues in elementary and secondary school mathematics*", door H. R. Douglass;
b. „*Mathematics for our time*", door R. S. Burington;
c. „*Which way precollege mathematics?*" door K. O. May;

DIDACTISCHE REVUE [1])

The Mathematics Teacher, Volume XLVII, number four, April 1954; the official journal of the National Council of Teachers of Mathematics; Iowa.

In „*Mathematics and the development of good citizens*" zet C. Meehan uiteen, waartoe we onze leerlingen door middel van wiskunde onderwijs opvoeden. Terecht wijst ze in dit verband op „accuracy", „neatness", „ability to make wise decisions", „respect for law", „co-operation and leadership", „self-reliance and self-discipline", „ability to express one's ideas before a group", „recognition of man's limitations", zonder dat ze er echter in slaagt duidelijk te maken, dat ten dezen opzichte de wiskunde een speciale plaats inneemt tussen de andere vakken.

In „*Euclidean constructions*" wijst R. C. Yates de wiskundeleraren erop „that the true Euclidean rules of the game are not usually observed in the geometry classes of the twentieth century". In het bijzonder verzet hij zich tegen het gebruik van een passer om lengten over te brengen (de leerling mag niet „carry lengths with the compasses, i.e. use the compasses as dividers") en tegen het gebruik van gradenbogen.

In „*Reason and rule in arithmetic and algebra*" verdedigt R. Beatly de stelling „that there is reason for every rule in mathematics, but the reasons are not all of the same kind". Drie typen wijst hij nadrukkelijk aan, aangeduid door de letters F, C en S. Deze letters hebben betrekking op de begrippen „fundamental", „logical chain" and „slippery". „In each case it is possible that intuitive acceptance of incomplete or otherwise erroneous explanations (S) may give meaning to the pupil's work, while explanations that are complete and correct (F) will leave them utterly cold".

P. Kirkpatrick behandelt de „*Probability of a simple card game*".

---

[1]) De nummers van de lopende jaargang van de tijdschriften genoemd in deze Didactische Revue kan men ter lezing bekomen door bemiddeling van de heer G. Boost, Parkaan 107*a*, Roosendaal (N.-Br.), vorige jaargangen door bemiddeling van dr Joh. H. Wansink, Julianalaan 84, Arnhem.

d. *„Mathematics for life adjustment"*, door L. Blank;

e. *„The mathematics teachers' opportunities for guidance"*, door K. E. Brown;

f. *„The mathematics required for graduation from high school"*, door W. I. Layton.

Voorts schrijft J. E. Sornito over *„Vector representation of multiplication and division of complex numbers"* en G. R. Anderson en A. W. Van der Meer over *„Comparative study of the effectiveness of lessons on the slide rule presented via television and in person"*.

De rubriek *„Aids to teaching"*, die zes jaar lang regelmatig werd opgenomen, wordt in deze aflevering besloten.

Bijdragen over een gulden-snede-passer en over de rekenliniaal vindt men in *„Devices for the mathematics classroom"*.

Ph. S. Jones geeft zijn derde historische bijdrage over *„Complex Numbers"*. A. Struyk vertaalde een artikel van Thébault over *„On numbers which terminate perfect squares"*.

Belangrijk is de poging van W. L. Schaaf om een bibliographie te maken, die iets van de betrekkingen tussen wiskunde en samenleving doet uitkomen; *„Mathematics and people"* is de titel, en er heeft een onderverdeling plaats over (1) the sociology of mathematics, (2) the mathematics of social behaviour, (3) mathematics and the social sciences, en (4) Politische Arithmetik, Mathematische Volkswirtschaftslehre und Staatsbürgerkunde.

Voorts: een aantal kleinere bijdragen, het program van de vijfdaagse jaarvergadering (Fourteenth Summer Meeting) te Washington en van de eendaagse „Annual Summer Meeting" te New York, en „Reviews and evaluations".

The Mathematical Gazette; Vol. XXXVIII, no. 324, May 1954; London.

Deze aflevering bevat drie artikelen (samen 30 blz.) en voorts *„Mathematical Notes"* en *„Reviews"* (60 blz.).

T. A. A. Broadbent, die jarenlang Editor van de Mathematical Gazette is geweest, en die nu voorzitter is van de Mathematical Association, hield op 4 Januari 1954 zijn presidential address, getiteld *„Printer's ink and the teacher"*.

J. S. Batty behandelt *„Some properties of pure recurring decimals"*.

J. Maclean beantwoordt de vraag: „*Why teach mathematics?*", maar laat duidelijk uitkomen, dat er tussen de vragen How? What? Why? een onderlinge samenhang bestaat. Hij geeft in zijn artikel tevens aan, welke niet-traditionele leerstof hij wenselijk acht, in het bijzonder voor de Secondary Modern Schools.

School Science and Mathematics; Volume LIV, Number 4, Whole 474, April 1954; Orgaan van de CASMT (Central association of science and mathematics teachers); Menasha, Wisconsin.

1. In „*A Message from your President*" ziet H. Vernon Price de vraag onder ogen, op welke wijze de lerarenorganisatie CASMT kan zorgen voor een regelmatig toestromen van jonge leden; het antwoord is: door het op peil houden van het tijdschrift én door een goede organisatie van de jaarlijkse vergaderingen.

2. In „*Staking out new ground in high school arithmetic*" vraagt J. D. Wilson zich af, hoe het rekenonderwijs op de high school en de beroepsopleiding van de teacher op een hoger niveau gebracht kunnen worden. Hij pleit voor „a better understanding of the number system and a careful systematic study of arithmetical meanings". In de teacher colleges behoort te zijn „a compulsory general education course in mathematics", waar de rekenkunde wordt geleerd die de ontwikkelde Amerikaan niet kan missen (elementary statistics, consumer credit, the science of chance, budgeting, insurance and taxes). De kwaliteiten van ons getallenstelsel moeten worden getoond door ook de getallen en hun bewerkingen zoals deze in Egypte, in Babylonië, in Rome en in het Indisch-arabische stelsel tot ontwikkeling kwamen, in de klas te bespreken. Gewenst is ook in andere talstelsels dan het tientallig stelsel te laten rekenen, maar de waarschuwing „Care must be taken not to overdo such instruction", ontbreekt niet.

3. L. G. Brandes bespreekt de zin van ontspanningswiskunde in zijn artikel „*Why use recreational mathematics in our secondary mathematical classes?*". Hij wijst erop, dat men nog te vaak bij het rekenonderwijs meent te kunnen volstaan met een behandeling van „the same old subject in the same old way". De auteur zoekt verbetering naar twee zijden, enerzijds wil hij er nog meer naar streven de leerlingen te plaatsen in „real life situations", anderzijds wenst hij uitdrukkelijk aandacht te besteden aan „recreational mathematics". Voor de praktijk hiervan geeft hij enige wenken en een boekenlijst.

4. B. E. Meserve beantwoordt de vraag: „*Are the colleges and the high schools cooperating most effectively in meeting the mathematical needs of their students?*" ontkennend. Met voorbeelden wordt aangetoond, dat taakverdeling en samenwerking te wensen overlaten. Uit één der gevallen citeren we: „He can not readily divide 32 by 4, or find the square root of 64. He does not know his multiplication table. Probably a full year of his life will be sacrified because of the refusal of his previous teachers to meet his mathematical needs. His case may be extreme but it is not isolated". Dit alles gold een leerling die de high school met glans had doorlopen. De auteur gaat na welke factoren gunstig en welke ongunstig zijn voor verbetering der samenwerking. Schadelijk werkt „the assumption that anybody can teach mathematics — it's all in the book, even the answers."

5. In „*Arithmetic easier nowadays*" maakt W. Davis gewag van baanbrekend werk van prof. Howard F. Fehr, die „has demonstrated through several years of experience that arithmetic is easy to learn when the children are taught what the numbers mean". Het rekenen gaat gemakkelijk, als men niet met onbenoemde getallen drilt, maar met dingen leert rekenen. „The idea is to present arithmetic as concretely as possible". Dit schijnt alles te zijn: men krijgt de indruk, dat de Amerikaanse rekenmethodiek in haar ontwikkeling ver bij de Nederlandse achterstaat.

6. W. H. Carnahan onderzoekt regelmaat in de spreiding der priemgetallen in zijn artikel: „*Prime numbers in sequences*".

7. Er zijn ruim 10 bladzijden *Book Reviews.*

School Science and Mathematics, Volume LIV, Number 5, Whole 475, May 1954; Menasha (Wisconsin).

Van de wiskundige bijdragen in deze aflevering noemen we de volgende.

1. J. C. Warner, „*To teachers of science and mathematics in the schools*". Op grond van zijn ervaringen is de auteur van oordeel, dat er te veel regels en theorema's op onze scholen worden gememoriseerd, en dat de leerlingen te weinig leren werkelijke problemen in wiskundige termen om te zetten. „It is my belief that secondary education in the sciences and mathematics which is the best for college preparation may also be best as preparation for life".

2. J. S. Georges, „*Selecting a textbook in mathematics*". De auteur rubriceert de factoren die bij de keuze van een schoolboek

een rol spelen, onder de volgende titels: (1) aims of instruction; (2) organization of materials; (3) methods of instruction; (4) psychological principles; (5) evaluation of instruction.

3. Sister M. Ph. Steele, *„The mathematics teacher lends a hand"*.

4. H. M. Barnes, *„Technical training applications"*. Een man uit de praktijk (Chrysler Corporation, Detroit) verklaart: „This purpose [of mathematis] will vary slightly with the trade but mathematics generally serves two purposes in the trades: (1) as a direct tool for securing needed data, and (2) as a necessary background for comprehending technical functions". Wat de behoeften van de praktijk zijn, wordt voor diverse onderdelen der wiskunde nagegaan.

5. L. G. Brandes, *„Recreational mathematics as it may be used with secondary school pupils"*. Voorbeelden worden gegeven van recreational-type quizzes, number oddities, magic squares, special products, tricks and games, en puzzles.

6. R. E. Fleming, *„A family of numbers"*. Beschouwd worden de getallen x en y, waarvoor $x + y = x \cdot y$. Nagegaan wordt:

a. A family of numbers exists in pairs such that the product of the members of a pair equals their sum.
b. The only identical pairs satisfying the requirements are 2 and 2, and 0 and 0.
c. The only integral pairs are 2 and 2, and 0 and 0.
d. Except for the identical pairs, not more than one member of each pair may be integral.
e. Not more than one member of each pair may be negative.
f. The pairs may be real or imaginary, rational or irrational.
g. When the members of a given pair are written as simple fractions or improper fractions in their lowest terms, the numerator of each fraction is the same, and equals the sum of the denominators.

7. *„Problem department"* en *„Book reviews"*.

School Science and Mathematics, Volume LIV, number 6, Whole 476, June 1954.

G. G. Mallinson brengt verslag uit over een *„Round Table on Research in Science and Mathematics"*. De mathematische problemen, die aan de orde waren, laten zich a. v. indelen:

(1) Identification of the concepts and functional competencies in mathematics needed for the general education of all students at the

secondary level; (2) the background in mathematics needed for teaching courses in mathematics for general education; (3) tests that present situations in which the methodology of mathematics is tested rather than computational skills; (4) techniques for teaching mathematics inductively and for teaching students to think mathematically; (5) non-technical publications that summarize the implications and practical applications of research in the teaching of mathematics.

J. J. Kinsella besluit zijn artikel over „*Some reflections on the general mathematics situations*" met: „One thing is certain: general mathematics has become special mathematics. . . . General mathematics, like general education, is no longer menu for all; there is now more than one diet to follow in order to maintain good health."

C. W. Trigg behandelt in „*Geometry of paper folding*" het vouwen van een drinkbeker uit een vierkant blad papier, en laat zien tot welke wiskundige begrippen het vouwprobleem kan leiden.

W. D. Reeve schrijft over: „*The play of the imagination in mathematics*" en spreekt hierin o.a. over meetkunden van verschillende dimensies.

Ph. Peak: „*Today's high school to college situation in mathematics*".

L. H. Lange: „*More mathematical lingering: a maximum theorem*". Dit artikel bevat beschouwingen over in een driehoek beschreven rechthoeken.

R. Jurgensen wijst op moeilijkheden bij de oplossing van de vergelijking: $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{cotg} x$.

W. B. Caton wenst blijkens zijn artikel „*the teaching of mathematics*" in alle schooltypen meer de nadruk te leggen op het aanbrengen van fundamentele begrippen en methoden.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht; 7. Band, 1. Heft, 1954/55; 1 Mai 1954; Bonn/Rhein, Frankfurt/Main.

G. Schrooten schrijft over „*die philosophische Durchdringung des Biologieunterrichts*".

H. Athen gaat in „*Physikalische Darstellung mathematischer Funktionen*" na, in hoeverre de brug van Wheatstone en potentiometers in de rekentechniek dienst kunnen doen.

P. Dallmann bespreekt interessante „*Zahlenrechtecke*".

O. Intrau: „*Eine Herleitung der Sätze zur Berechnung des Kugeldreiecks*".

W. Papenfusz: „*Gibt es eine Erweiterung des Pythagoreischen Lehrsatzes?*"

O. Hofmann: „*Ein Beweis des Ptolemäischen Satzes*".

A. Siebel: „*Newtonsche Summen und Produkte*".

O. Botsch geeft een „*Elementare Berechnung dekadischer Logarithmen*" door gebruik te maken van tafels van kwadraatgetallen en derdemachten, die zich uitstekend voor schoolgebruik leent. Voorts een „*Geometrische Herleitung der Summe der geometrischen Reihe*".

G. Thoms vervolgt zijn artikel over „*Die Relativitätstheorie in elementarmathematischer Darstellung*".

W. Böhme zet de discussie over „*Lebensnahe Mathematikaufgaben*" voort.

In verband met de lezingen van dr Wagenschein voor de Wiskundewerkgroep der W.V.O. in 1953 wijs ik nog op Steinhäuser's artikel „*der Physikunterricht auf der Oberstufe*".

Van de recensies noem ik uitdrukkelijk die over het in 1953 verschenen werk van prof. K. Strunz: „*Pädagogische Psychologie des mathematischen Denkens*", Quelle und Meyer; 11,40 gld.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht; 7. Band, 2. Heft, Juni 1954; Bonn/Rhein Frankfurt/M.

1. In het artikel „*Philosophische Fragen der modernen Atomistik*" van E. Sellien wordt de opvatting gehuldigd, „dasz der naturwissenschaftliche Unterricht ohne die philosophische Ergänzung und Durchdringung seinen „humanistischen Zielen" nicht gerecht werden kann". Een aantal problemen, die zich voor behandeling in de klasse lenen, worden geformuleerd.

2. Bijzondere aandacht verdient het artikel van Kuno Fladt over „*Strenge und Systematik im geometrischen Unterricht der höheren Schulen*", waarvoor het methodische werk van P. Treutlein uitgangspunt en leidraad levert. Een drietal werken van deze auteur worden besproken, waarna Fladt zegt: „Diese dreifache Reform des geometrischen Unterrichts, deren drei Eigenschaften

a) die Zurückdrängung der in der euklidischen Methode kristallisierten Logik auf der Mittelstufe,

b) der Ersatz der euklidischen Methode durch die verwandtschaftsgeometrische namentlich auf der Oberstufe,

c) die lebendige Durchdringung der ebenen und räumlichen Geometrie während des ganzen Geometrieunterrichts

sind, hat sich nun in einer sehr merkwürdigen Weise weiterentwickelt und zeigt so recht deutlich das ewige Ringen und Pendeln des menschlichen Geistes zwischen Freiheit und Bindung, Anschauung und Logik, Heuristik und Systematik". De schrijver houdt een pleidooi voor het behoud van synthetische meetkunde. „Denn die lebendige Geometrie lebendiger Anschauung ist das Lebenselement der Schulmathematik, und es ist die unabdingbare Pflicht der Hochschule, diese „anschauliche Geometrie" nicht zu vernachlässigen". „Beherrschen Funktions- und Grenzbegriff die Schulanalysis, so tun dies in der Schulgeometrie Verwandtschafts- und Gruppenbegriff".

3. W. Wilke schrijft „*Über die Pythagoreischen Zahlen*".

4. De discussie over „*Naturwissenschaft und Religion*" wordt door R. Wolff voortgezet.

5. O. Höfling geeft „*Vorschläge zu einem Lehrplan für den Unterricht in Physik an den höheren Schulen des Bundesgebietes*".

6. R. Vogel geeft verslag van de „*Fördervereinstagung in München* 1954". Hieraan namen meer dan 1200 personen deel, waaronder 44 gasten uit omringende landen; hierbij waren geen Nederlanders!

Van de belangwekkende voordrachten in de vijf congresdagen gehouden, kunnen we hier enkel de titels van de wiskundige voordrachten opnoemen.

a. *Allgemeinbegabung oder mathematische Sonderbegabung* (prof. dr K. Strunz);
b. *Konstruktive Vorschläge zur Reform des mathematischen Unterrichts* (dr P. Sengenhorst);
c. *Mathematikunterricht und die Tübinger Resolution* (dr H. Freund);
d. *Gruppentheorie im Unterricht?* (O. Degosang);
e. *Das Prinzip der Beweglichkeit der Figuren, gezeigt an geometrischen Konstruktionsaufgaben* (F. Denk);
f. *Vorführung eines Unterrichtsfilms über Kegelschnitte* (E. Baumann);
g. *Erweiterungen der klassischen Dreiecksgeometrie* (dr R. Lauffer);
h. *Trigonometrie und Vektorrechnung* (dr K. Faber);
i. *Über ein Gerät zur Bewegung geometrischer Figuren* (A. Köster);
j. *Fragen der Ökonometrie im mathematischen Unterricht* (F Löwenhaupt);
k. *Der Ordnungsbegriff in der reellen Analysis* (prof. dr G. Aumann);
l. *Gruppentheorie der Ornamente als Thema für Arbeitsgemeinschaften* (dr H. Herrmann);

m. *Zum Gedächtnis an François Viète* (prof. dr J. E. Hofmann);
n. *Elementargeometrische Modelle zur Differentialgeometrie der Flächen* (prof. dr R. Sauer).

7. Tot slot bevat de aflevering een „*Bücher- und Zeitschriftenschau*".

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht; 7. Band, 3. Heft, 1 Aug. 1954; Bonn/Rhein, Frankfurt/M.

Van de mathematische bijdragen uit deze aflevering verdienen vermelding:

a. *Elementares Näherungsverfahren für π mit rationalen Werten*, door prof. O. Botsch;
b. *Bericht über das 6. Treffen der Internationalen Kommission zum Studium und zur Verbesserung des mathematischen Unterrichts in Calw/Schwarzwald*, door Prof. F. Löwenhaupt.

In het eerste artikel wordt de omtrek van de eenheidscirkel zodanig verdeeld, dat de oppervlakten der corresponderende middelpuntsdriehoeken rationaal zijn. Hieruit wordt ter benadering voor π afgeleid:

$$f(n) = 4n \sum_{k=o}^{n-1} \frac{K}{n^2 + K^2}, \text{ met } K = n^2 + k(k+1);\ \pi = \lim_{n \to \infty} f(n).$$

Een bezwaar voor toepassing in de school is, dat b.v. voor $n = 6$ de waarde van π slechts in 1 decimaal nauwkeurig wordt gevonden!

Aan het enthousiaste artikel van prof. Löwenhaupt ontlenen we: „In der Woche vom 20. bis 26. Juli 1953 trafen sich Mathematiker von 6 Nationen (England, Belgien, Frankreich, Luzembourg, Schweiz und Deutschland) in der Akademie für Erziehung und Unterricht in Calw, um unter dem Vorsitz und der Leitung von Universitätsprofessor dr Caleb Gattegno, London Fragen des mathematischen Unterrichts zu diskutieren.

Diese Kommission zum Studium und zur Verbesserung des mathematischen Unterrichts besteht seit 1950 und wurde in London gegründet. Sie wird geleitet von dem sprachgewandten und energiegeladenen Professor Gattegno, der einen Lehrstuhl für Mathematik und Didaktik des mathematischen Unterrichts an der Universität in London innehat, und steht unter dem Vorsitz des französischen Mathematikers Choquet, Paris. Ein- bis zweimal jährlich treffen sich die Mitglieder des Vorstandes mit den Mitarbeitern der einzelnen Ländergruppen, um über bestimmte Themen zu disku-

tieren. Tagungsorte waren bis jetzt London, Brüssel, Aarau/Schweiz, Melun bei Paris und Luxembourg. Die behandelten Themen lauteten: Beziehungen zwischen der Jugend und dem mathematischen Lehrplan; die ersten Jahre des Geometrie-Unterrichts; Mathematik von der Volksschule bis zur Universität; die Art des Denkens beim Mathematiker und beim Physiker.

Die sechste Zusammenkunft in Calw hatte zum Thema „Développement de l'étude des rapports de l'enseignement mathématique avec la pensée des éleves".

Er werd een duitse sectie gevormd: „Mit Schreiben vom 2. Nov. 1953 wurde die deutsche Sektion genehmigt und ihr Vorsitzender prof. dr Drenckhahn, Flensburg, bestätigt".

Elemente der Mathematik, Band IX, nr. 3; Birkhäuser, Basel, 15 Mai 1954.

In zijn derde bijdrage over „*Einfall und Überlegung in der Mathematik*" geeft B. L. van der Waerden aan, hoe in een conferentie tussen Artin, Schreier en hem het bewijs van een vermoeden van Baudet tot stand kwam. Dit vermoeden luidde: Als men alle natuurlijke getallen 1, 2, 3, . . . in twee klassen verdeelt, dan bevat minstens één van deze klassen een rekenkundige reeks van l termen, waarbij l een van te voren willekeurig gegeven natuurlijk getal is.

De schrijver geeft het aandeel van Artin en van hem in het geconstrueerde bewijs nauwkeurig aan. Het geheel is een waardevolle bijdrage inzake de rol der inventie op wiskundig gebied.

W. Klepper corrigeert een uitspraak van Bieberbach in zijn artikel „*Über die natürliche Gleichung* $R(s) = \mu a(\lambda + \cos \frac{s}{a})$.

H. Bieri behandelt „*Zwei Minimumprobleme über konvexe Rotationskörper*".

H. Holliger geeft „*Ein Vorschlag zur Logarithmentafel*".

L. Locher-Ernst bespreekt zeer waarderend „*Im Anfang war die Zahl*" van F. Müller.

Elemente der Mathematik, Band IX, Nr. 4; 15 Juli 1954; Basel.

K. F. Moppert, „*Über das Rechnen mit Operatoren*".

R. Jacobi, „*Einige Parabeleigenschaften*".

Ch. Blatter, „*Über die gemeine Zykloide*".

R. Ludwig, „*Eine Parallelogramaufgabe*".

P. Henrici, *„Bemerkung zu einer Aufgabe von Herrn van der Pol"*.

R. Rose, *„Über die Schreibweise der Wurzeln"*. De auteur onderscheidt „arithmetische, algebraïsche und komplexe Wurzeln" en tracht de moeilijkheden, die ontstaan, doordat men in alle drie gevallen hetzelfde wortelteken gebruikt, te verminderen, door voor complexe wortels een gewijzigd wortelteken in te voeren.

Opgenomen is een fraaie tekening van een regelmatige 48-hoek met àl zijn diagonalen.

Paedagogische Studien, 31e jaargang, vijfde aflevering, Mei 1954; J. B. Wolters, Groningen.

1. Prof. dr H. Nieuwenhuis schrijft over: *„De schoolloopbaan van ruim 500 U.L.O.-leerlingen"* uit Den Haag en omgeving, die in 1948 tot de school werden toegelaten en toen met behulp van intelligentie-tests zijn onderzocht. Bedoeling van het ingestelde onderzoek was de waarde van de gebruikte tests als middel bij de selectie van de leerlingen aan de practijk te toetsen. Iets minder dan de helft van de leerlingen blijkt het doel (een einddiploma) te bereiken. Het artikel geeft gedetailleerde cijfers voor de diverse intelligentiegroepen. De gepubliceerde cijfers wijzen erop, dat er op onderwijsgebied problemen liggen, die dringend om een nader onderzoek en om oplossing vragen. In de snel veranderde maatschappij heeft slechts het onderwijs zijn oude structuur (de structuur uit de gildetijd) nog ongeschonden bewaard. Met een zeer primitieve opvoedings- en onderwijsstructuur trachten we nog steeds de problemen, die onze moderne, gecompliceerde maatschappij ons op dit gebied stelt, op te lossen. Wezenlijke vernieuwing vraagt nieuwe organen.

2. Dr G. Bolkestein bespreekt in: *„O.K.W. in de toekomstige grondwet"* de op het onderwijs betrekking hebbende problemen rondom artikel 208 van de grondwet.

Paedagogische Studien; 31e jaargang, zesde aflevering, Juni 1954; J. B. Wolters, Groningen.

Dr J. M. L. Peters verdedigt in *„De dubbele betekenis van de film voor het onderwijs"* de opvatting, dat er in het onderwijs plaats zou moeten zijn voor een didactiek van het zien naast een didactiek van het spreken, schrijven, lezen, rekenen, tekenen, enz. De didactiek die de auteur beoogt, houdt dan o.m. in, dat men de leerlingen het actief en het passief gebruik van de visuele filmtaal moet leren.

Prof. dr H. W. F. Stellwag heeft een negental studenten in de politiek-sociale faculteit van de Gemeentelijke Universiteit te Amsterdam in November 1953 een onderzoek laten instellen in 61 gezinnen naar de straffen die er werden toegepast, naar de feiten waarvoor gestraft werd, naar het doel van de straf, en naar de motivering van de straf. Van dit onderzoek wordt een en ander meegedeeld in het artikel: „*Welke straffen passen ouders op hun kinderen toe?*"

Paedagogische Studiën, 31e jaargang, 7/8 afl., Juli/Augustus 1954, J. B. Wolters, Groningen.

Prof. dr H. Nieuwenhuis brengt verslag uit over „*Een geschiedenisonderzoek met een 500-tal leerlingen van Haagse lagere en middelbare scholen*", waarin gezocht werd naar een vorm van geschiedeniswerk op het toelatingsexamen voor V.H.M.O., dat meer gericht zou zijn op het toetsen van inzicht en het kunnen werken met reeds verworven kennis dan het testen van parate-kennis-zonder-meer.

F. Th. van der Maden bepleit in „*Grondwetswijziging en onderwijsverslag*" het handhaven van het grondwettelijk voorschrift jaarlijks verslag omtrent het onderwijs aan de Staten-Generaal te doen uitbrengen. De jongste Staatscommissie tot herziening van de Grondwet stelde voor de desbetreffende grondwettelijke verplichting te doen vervallen.

Prof. dr M. J. Langeveld bespreekt uitvoerig de „*Inleiding in die prinsipiële opvoedkunde*" van dr C. K. Oberholzer, die zich met één slag een plaats veroverd heeft op een niveau, dat uitsteekt boven dat van de Angelsaksers der laatste generatie.

VERSCHEIDENHEDEN.

door

PROF. DR. O. BOTTEMA

XXXVII. *De som van de sinussen van de hoeken van een driehoek.*

In het eindexamenvraagstuk H.B.S. B. 1934, Trigonometrie 1 is sprake van een driehoek ABC, waarvoor geldt

$$\sin A + \sin B + \sin C = \tfrac{1}{2}$$

en waarvan onder meer bewezen moet worden dat hij stomphoekig is. Dit onderdeel gaf indertijd nogal moeilijkheden omdat de eenvoudige bewijsgang afwijkt van in de gegeven omstandigheden gebruikelijke redeneringen. De drie sinussen zijn alle positief, waaruit volgt dat elk afzonderlijk kleiner is dan $\frac{1}{2}$. Dat betekent dat ieder der hoeken òf ligt in het interval $0 < x < 30°$ òf in $150° < x < 180°$ De hoeken kunnen echter niet alle in het eerste interval liggen, want dan zou hun som de 180° niet halen. Een der hoeken is dus stomp.

Uit de redenering volgt dat de waarde $\frac{1}{2}$ uit het rechterlid zeker niet de grens betekent waarvoor het bewijs en de conclusie geldig zijn. Blijkbaar mag men daar zonder bezwaar $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ toelaten, omdat dan de hoeken tot de intervallen $0 < x < 60°$ en $120° < x < 180°$ worden beperkt. Maar een korte nadere overweging maakt duidelijk dat ook hiermee het uiterste onmogelijk bereikt kan zijn.

Hoe groot mag p in de gegeven betrekking

$$\sin A + \sin B + \sin C = p$$

gekozen worden opdat de conclusie der stomphoekigheid gerechtvaardigd is?

Door de relatie zijn de hoeken van de driehoek uiteraard niet bepaald. Voor kleine waarden van p, zeker tot $p = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ toe, zijn alle betrokken driehoeken stomphoekig. Grotere waarden van p zullen ook scherphoekige doen zien. Met enig vertrouwen in de continuiteit der betreffende afhankelijkheden mag men verwachten, dat een overgang zal plaats vinden voor een waarde van p, die een *rechthoekige* driehoek toelaat.

Is $A = 90°$, dan is $\sin A = 1$; voorts is $q = \sin B + \sin C = \sin B + \cos B$, waarbij $0 < B < 90°$. Doorloopt B dit interval dan doorloopt q een reeks waarden, beginnende met 1, daarna toe-

nemend en voor $B = C = 45°$ het maximum $\sqrt{2}$ bereikend om dan weer monotoon tot 1 af te nemen. Voor rechthoekige driehoeken geldt dus

$$2 < p \leqq 1 + \sqrt{2}$$

en daar men een rechthoekige driehoek door een kleine wijziging der hoeken in een stomp-, resp. scherphoekige kan veranderen, is het duidelijk dat voor

$$2 < p < 1 + \sqrt{2}$$

behalve rechthoekige ook stomp- en scherphoekige driehoeken mogelijk zijn.

Hieruit volgt dat voor *stomphoekige* driehoeken geldt

$$0 < p < 1 + \sqrt{2}$$

en voor *scherphoekige*

$$2 < p \leqq \tfrac{3}{2}\sqrt{3}$$

waarbij de laatste waarde het maximum van p (voor een gelijkzijdige driehoek) voorstelt.

Voor de stomphoekigheid van de driehoek is dus

$$0 < p < 1 + \sqrt{2}$$

een noodzakelijke,

$$0 < p \leqq 2$$

een voldoende voorwaarde. De constante $\frac{1}{2}$ in het oorspronkelijke vraagstuk zou dus door 2 mogen worden vervangen.

Voor een nadere discussie veronderstellen wij $A \geqq B \geqq C$ waaruit volgt $A \geqq 60°$. Is $A = \alpha \geqq 60°$ gegeven, dan is $\beta + \gamma = 180° - \alpha$. Hieruit volgt: voor $\alpha < 90°$ kan β het interval $90° - \frac{1}{2}\alpha \leqq \beta \leqq \alpha$ doorlopen; voor $\alpha = 90°$ het interval $90° - \frac{1}{2}\alpha \leqq \beta < 90°$; voor $\alpha > 90°$ het interval $90° - \frac{1}{2}\alpha \leqq \beta \leqq 180° - \alpha$. De functie $q = \sin\beta + \sin\gamma = \sin\beta + \sin(180° - \alpha - \beta)$, met vaste α en variabele β heeft als eerste afgeleide $\frac{dq}{d\beta} = \cos\beta - \cos\gamma$, terwijl $\frac{d^2q}{d\beta^2} = -\sin\beta - \sin\gamma$. Hieruit volgt dat in elk der drie gevallen q de grootste waarde heeft in het linkeruiteinde van het interval en monotoon afneemt. De conclusie luidt: is α de grootste hoek van de driehoek dan heeft men

voor $60° \leqq \alpha < 90°$: $\sin 2\alpha + 2\sin\alpha \leqq p \leqq \sin\alpha + 2\cos\frac{1}{2}\alpha$
voor $\alpha = 90°$: $2 < p \leqq 1 + \sqrt{2}$
voor $\alpha > 90°$: $2\sin\alpha < p \leqq \sin\alpha + 2\cos\frac{1}{2}\alpha$

Voor de verschillende waarden van α zijn de grenzen voor p in de

EENHEDENSTELSELS

(eenheden en symbolen volgens de nieuwste voorschriften van het Centraal Normalisatie Bureau)

door

F. HENNEMAN

„De maat van alle dingen is de mens, van de zijnde, dat zij zijn, van de niet-zijnde, dat zij niet zijn." - PROTAGORAS.

§ 1. Door de publicatie van de normbladen N950, N1221 ... N1224 in September 1953 heeft de *Hoofdcommissie voor de Normalisatie in Nederland* (*HCNN*) de weg gebaand, die moet leiden naar vereenvoudiging en eenheid in het gebruik van de *maten voor natuur- en werktuigkundige grootheden.* De belangrijkheid hiervan voor het onderwijs is direct duidelijk, en speciaal ook, indien men bedenkt, dat deze stap juist is gedaan op een verzoek komende uit onderwijskringen. Toch zal het nog wel geruime tijd duren, aleer de oude maatstelsels door het nieuwe stelsel geheel verdrongen zijn. Bij een compromis is het noodzakelijk, dat elk der partijen afstand doet van bepaalde voordelen. Dit geldt ook hier: het beste is de electrotechniek er af gekomen; ook voor de natuurkunde zijn de bezwaren bij de overgang niet groot, gezien de grote verwantschap tussen het daar gebruikelijke stelsel en het nieuwe stelsel; voor de techniek echter zal deze overgang ongetwijfeld vele moeilijkheden met zich medebrengen (cf. N950;6.1). In ieder geval opent bovengenoemde publicatie reeds thans de mogelijkheid tot een *belangrijke beperking bij het onderwijs* in deze materie; zo kan men — om iets te noemen — de behandeling van twee (nl. „groot" en „klein") statische stelsels, evenals die van de ongebruikelijke statische massa eenheid gevoeglijk achterwege laten.

Daar ons gebleken is, dat deze „vernieuwing" in vele gevallen — zowel wat betreft het onderwijs als de praktijk — nog niet die bekendheid geniet, die men allicht zou verwachten, leek het ons niet ondienstig, daarvan in een artikel een kort résumé te geven. Om tot een duidelijk overzicht te komen van de stand van zaken, zullen we noodzakelijk ook vele oude bekende dienen te noemen.

Overigens is alleen datgene opgenomen, wat van *didactische betekenis* is; voor volledigheid en exactheid mogen we verwijzen naar verschillende *normen* (zie **Tabel I**) en voor definities van grootheden en eenheden naar hand- en leerboeken en eveneens naar genoemde normen.

§ 2. In de natuurkunde gebruikt men het *physische eenhedenstelsel,* ook *centimeter-gram-seconde-(cgs)stelsel* genoemd, dat afkomstig is van GAUSZ (1777—1855).

In de techniek is een ander eenhedenstelsel in gebruik gekomen, dat het *technische eenhedenstelsel* genoemd wordt.

Het **cgs-stelsel** (zie **Tabel II**) is theoretisch verreweg het belangrijkste. Vooreerst is het *absoluut,* d.w.z. het berust op de onafhankelijke grondeenheden lengte, tijd en massa. Het technische stelsel daarentegen berust op de grondeenheden lengte, tijd en kracht en is *niet* absoluut, omdat de eenheid van kracht (nl. het gewicht van 1 kilogram) afhankelijk is van een veranderlijke grootheid, de versnelling van de zwaartekracht. Voorts omvat het cgs-stelsel ook electrische eenheden: de zg. „electrostatische eenheden" (ese) en „electromagnetische eenheden" (eme), welke in de grondeenheden uitgedrukt kunnen worden. Voor een bepaalde electrische grootheid is de verhouding tussen eme en ese een bepaalde macht van de kritieke snelheid (lichtsnelheid in vacuo), dus ook een absolute waarde.

In de electrotechniek wordt een derde eenhedenstelsel toegepast, dat de z.g. *praktische eenheden* als bijv. de coulomb omvat. De verhouding tussen een praktische eenheid en de corresponderende eme is evenwel steeds gelijk aan een bepaalde macht van 10 (cf. **Tabel IV**).

Ten slotte zijn er nog algemeen gebruikelijke eenheden, die feitelijk in *geen enkel stelsel* thuis horen, omdat hun waarden geen decimale veelvouden zijn van corresponderende eenheden uit een der boven genoemde stelsels. Dit zijn o.a. de calorie, het kilowattuur en de paardekracht.

§ 3. Het bestaan van verschillende soorten eenheden naast elkaar gaf aanleiding tot tal van moeilijkheden. Mede op basis van internationaal overleg heeft de HCNN de keuze laten vallen op een nieuw eenhedenstelsel, dat zo goed mogelijk aan alle te stellen voorwaarden voldoet, nl. het **praktische eenhedenstelsel,** ook meter-kilogram-seconde-stelsel (**mks-stelsel;** we gebruiken deze namen naast elkaar, hoewel er historisch enig verschil is; zie N950) geheten

en dat ontworpen is door GIORGI (1871—1950). Dit stelsel verenigt vele voordelen in zich:

a. de eenheden voor lengte en massa zijn gelijk aan de *internationale standaardmaten* (en niet aan onderdelen hiervan, zoals de centimeter en het gram; in dit verband is men ook van plan, de naam „kilogram" te vervangen door een andere, waarin de decimale voorvoeging „kilo" niet meer in voorkomt;
b. het is *absoluut;* het vormt een *gesloten stelsel;*
c. de maten zijn aangepast aan de *eisen van de techniek* (cm en g zijn nl. voor praktisch gebruik ongeschikt);
d. de *praktische electrische eenheden* passen in het kader van het stelsel, waarmee de electrotechniek ten zeerste gebaat is;
e. het omvat tevens eenheden voor *warmte, licht* en *geluid.*

§ 4. Het praktische eenhedenstelsel (zie **Tabel III**) berust op vijf grondeenheden: **meter** (lengte), **kilogram** (massa), **seconde** (tijd), **ampère** (stroomsterkte) en **graad Celsius** (temperatuur). Men spreekt dan ook wel van het *mksAC-stelsel.* Met deze 5 grondeenheden is dit stelsel een „gesloten" (= „coherent" = „one to one") systeem, waarmede bedoeld wordt, dat elke afgeleide eenheid zonder coëfficiënten (anders dan 1) in een of meer grondeenheden kan worden uitgedrukt. Dit heeft mede ten gevolge, dat de principiële formules der natuur- en werktuigkunde evenmin behept zijn met coëfficiënten. In dit verband spreekt men ook van een „gerationaliseerd systeem" (speciaal, wat de electrische grootheden betreft; cf. N950). Een ideale toestand zou men bereiken, indien men consequent de gedefiniëerde eenheden en nimmer decimale veelvouden gebruikte (dus bijv. nooit: kilowatt, pikofarad). Het was dan nl. ook niet langer nodig de eenheden te *benoemen;* men had dan een *abstract maatsysteem.* Feitelijk is zo'n systeem reeds stilzwijgend ondersteld bij formules als: $s = vt$; $A = Ks$; $R = E/I$ in de theorie.

§ 5. In het **mks-stelsel** is de eenheid voor kracht de *newton:*

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m sec}^{-2} = 10^5 \text{ g cm sec}^{-2} = 10^5 \text{ dyn.}$$

De eenheden voor de mechanische, de thermische en de electrische energie „ontmoeten elkaar" in de *formule van GIORGI:*

1 Nm = 1 J = 1 Wsec

(1 newtonmeter = 1 joule = 1 wattseconde)

Door deze formule zijn de electrische eenheden direct gekoppeld aan de mechanische, evenals dit het geval is in het cgs-stelsel. Er

is dan ook een parallelisme tussen beide systemen. Alle maten volgen logisch uit elkaar en zijn formeel terug te voeren tot de drie dimensies: lengte, massa en tijd. Wegens de eigen structuur van de electriciteit is het evenwel noodzakelijk nog een *vierde dimensie* in te voeren. In het cgs-stelsel is dit impliciet gebeurd, in het mks-stelsel daarentegen expliciet.*) Voor dimensie komen alleen elementaire grootheden in aanmerking: de keuze is gevallen op de *stroom-(sterkte)*. Het is zeer verhelderend de definities van eenheid van stroom in beide systemen naast elkaar te zetten — hetgeen hieronder geschiedt.

§ **6.** In het **cgs-stelsel** is het eerst door WEBER (1804—1891) de *electromagnetische eenheid van stroom(sterkte)* gedefiniëerd. In enigszins gewijzigde vorm, doch principiëel niet verschillend, luidt zijn definitie:

„Twee evenwijdige rechtlijnige stromen hebben elk de waarde van 1 *eme*, als zij in vacuo op een afstand van 1 cm op elkaar een kracht van 2 dyn per cm uitoefenen.”

Substitutie in de desbetreffende formule uit de electriciteitsleer geeft dan:

$$\frac{2\ (eme)\ (eme)}{1\ (\mathrm{cm})} = \frac{2\ (\mathrm{dyn})}{1\ (\mathrm{cm})}$$

waaruit volgt: $\mathbf{1\ eme = 1\ dyn^{1/2} = 1\ g^{1/2}\ cm^{1/2}\ sec^{-1}}$.

Op analoge wijze is nu in het **mks-stelsel** de *ampère* gedefiniëerd (zie voor de exacte definitie N 1223, Toel. 1.1):

„Twee evenwijdige rechtlijnige stromen hebben elk de waarde van 1 *ampère*, als zij in vacuo op een afstand van 1 m op elkaar een kracht van 2.10^{-7} N per m uitoefenen.”

Substitutie in bovenbedoelde formule geeft:

$$\frac{2\ (\mathrm{A})\ (\mathrm{A})}{1\ (\mathrm{m})} = \frac{2.10^{-7}\ (\mathrm{N})}{1\ (\mathrm{m})}$$

waaruit volgt: $\mathbf{1A = 10^{-7/2}\ N^{1/2} = 10^{-7/2}.\ kg^{1/2}\ m^{1/2}\ sec^{-1}}$.

§ **7.** Uit de beide gevonden uitdrukkingen leidt men gemakkelijk af:

$$1\mathrm{A} = 10^{-1}\ eme\ \text{(van stroom)}$$

en dit is in overeenstemming met de gangbare verhouding tussen

*) Eigenlijk bezitten het electrostatische en het electromagnetische stelsel elk een zekere zelfstandigheid in het cgs-stelsel. Wij duiden deze gehele groep kortheidshalve aan met de term: **Gausz-eenheden,** als tegenhanger van de **Giorgi-eenheden**

§ **11.** In **Tabel VIII** zijn enkele eenheden vermeld, die *niet* passen in een der drie hier behandelde stelsels. Het gebruik van de *calorie*, het *kilowattuur* en de *paardekracht* zou de HCNN vervangen willen zien door resp. dat van de joule, van de megawattseconde en van de newtonmeter per seconde (of watt). De liter en de kubieke decimeter zijn niet identiek (zie N 1221; Toel. 2). Ditzelfde geldt voor de „internationale" en de overeenkomstige „absolute" electrische maten (zie N 1223; 1,1) Praktisch maakt dit weinig verschil, theoretisch kan men echter het „internationale" electrische maatstelsel als los staand van het cgs- (c.q. het mks-) stelsel beschouwen. Dit systeem behoort dus thans tot het verleden. De in de tabel gegeven herleidingsgetallen zijn de genormaliseerde waarden.

§ **12.** In **Tabel VI** hebben we een aantal maten opgenomen, die *wel* gerekend kunnen worden te behoren tot (één der) beide absolute stelsels; zo bijv. de *subjectieve* eenheden voor *helderheid* (nit) en *luidheid* (phon), die resp. betrekking hebben op het „standaardoog" en het „standaardoor".

Met de *vijfde grondeenheid graad Celsius* is de temperatuur in het praktische stelsel ingeschakeld. Voorts is door de gelijkstelling van de eenheid van warmte-hoeveelheid (J) met de eenheid van arbeid (Nm) bereikt, dat de „mechanische warmte-aequivalent" de waarde **1** aanneemt.

§ **13.** Op de in dit artikel geschetste wijze is een maatsysteem tot stand gekomen, dat het gehele gebied der natuurkunde: mechanica, warmteleer, stralingstheorie, electriciteitsleer, bestrijkt. Onvermijdelijk was het, dat een zodanige opzet ook wel enkele minder aangename consequenties met zich meebracht: zo is de dichtheid (soortelijke massa) van water 1000 (km^{-3}), het s.g. van water 9810 (Nm^{-3}) en de soortelijke warmte van water 4190 (Jk^{-1}).

§ **14.** Ten slotte mogen we nog onder de aandacht van de lezer brengen, dat sommige symbolen, als dyn en kgf, gewijzigd zijn, en dat in N 950 de uitspraak van joule met „dzjoel" is aangegeven. In **Tabel V** zijn enige toelaatbare decimale voorvoegingen opgesomd. We geven enige toepassingen hiervan:

1 Mdyn = 1 megadyne = 10^6 dyn.

1 MJ = 1 megajoule = 10^6 J.

1 MWsec = 1 megawattseconde = 10^6 Wsec.

1 pF = 1 pikofarad = 10^{-12} F.

I	Overzicht Normbladen (Normen)
N 333	Symbolen voor eenheden
N 334	Verhoudingen van eenheden
N 354	Symbolen voor de toegepaste mechanica (algemeen)
N 360	Symbolen voor wettelijke tijdseenheden
N 950	Het praktische eenhedenstelsel (toelichting)
N 1221	Het praktische eenhedenstelsel (geometrie en kinematica)
N 1222	Het praktische eenhedenstelsel (statica en dynamica)
N 1223	Het praktische eenhedenstelsel (electriciteit en magnetisme)
N 1224	Het praktische eenhedenstelsel (warmte en straling)
N 1267	Symbolen voor de Wiskunde
N 1268	Symbolen voor de natuurkunde I
N 1269	Symbolen voor de natuurkunde II

Opm.: De normbladen worden uitgegeven door de *Hoofdcommissie voor de Normalisatie in Nederland* (secretariaat: Centraal Normalisatie Bureau, s'-Gravenhage, Lange Houtstr. 13A) en zijn verkrijgbaar bij de Uitgeverij Waltman, Delft.

II	Gausz-eenheden (CGS-stelsel)	
Grootheid	Eenheid	Symbool
lengte	centimeter	cm (c)
tijd	seconde	sec (s)
frequentie	hertz	Hz
hoek	radiaal	rad
ruimtehoek	steradiaal	sr
snelheid	cm per sec	cm/sec
versnelling	cm per sec^2	cm/sec^2
hoeksnelheid	rad per sec	rad/sec
hoekversnelling	rad per sec^2	rad/sec^2
massa	gram	g
dichtheid	gram per cm^3	g/cm^3
kracht	dyne	dyn
druk	dyne per cm^2	dyn/cm^2

Grootheid	Eenheid	Symbool
arbeid (energie)	**erg**	**erg**
effect (vermogen)	erg per sec	erg/sec
massa-traagheids-moment	gram. cm^2	gcm^2
stroomsterkte	1 eme = v . ese	
spanning	1 eme = v^{-1}. ese	
lading (flux)	1 eme = v . ese	
weerstand	1 eme = v^{-2}. ese	
energie **(arbeid)**	1 **eme** = 1 . **ese**	
vermogen (effect)	1 eme = 1 . ese	
geleiding	1 eme = v^2 . ese	
capaciteit	1 eme = v^2 . ese	
coëfficiënt van zelfinductie	1 eme = v^{-2}. ese	
magnetische flux (poolsterkte)	maxwell	Mx
magnetische inductie	gauss	Gs
magnetische veld-sterkte	oerstedt	Oe

kritieke snelheid v = 3,00 . 10^{10} (cm/sec)

III	Giorgi-eenheden (MKS-stelsel)	
Grootheid	**Eenheid**	**Symbool**
lengte	meter	m
snelheid	m per sec	m/sec
versnelling	m per sec^2	m/sec^2
massa	kilogram	kg (k)
dichtheid	kg per m^3	kg/m^3
kracht	newton	N
druk	newton per m^2	N/m^2
arbeid (mechanische energie)	**newtonmeter**	**Nm**
effect (vermogen)	Nm per sec	Nm/sec
massa-traagheidsmoment	kg. m^2	kgm^2

Grootheid	Eenheid	Symbool
stroomsterkte	ampère	A
spanning	volt	V
lading (flux)	coulomb	C
weerstand	ohm	Ω
arbeid (electrische energie)	**wattseconde**	**Wsec**
vermogen (effect)	watt	W
geleiding	siemens	S
capaciteit	farad	F
coëfficiënt van zelfinductie	henry	H
magnetische flux (poolsterkte)	weber	Wb
magnetische inductie	weber per m²	Wb/m²
magnetische veldsterkte	ampère per m	A/m
temperatuur	graad Celsius	°C
arbeid (thermische energie; hoeveelheid warmte)	**joule**	**J**
soortelijke warmte	J per kg °C	J/kg°C
straling (lichtstroom)	J per sec (watt)	J/sec (W)
stralingssterkte	W per steradiaal	W/sr

Opm.: De eenheden voor tijd, frequentie, hoek, enz. zijn dezelfde als die in het cgs-stelsel.

IV	**Giorgi-eenheden**		Verhouding Giorgi-e Gauss-e	**Gauss-eenheden**		
Symbool	dimensie			Symbool	dimensie	
m	m		10^2	cm	c	
m/sec	m	s^{-1}	10^2	cm/sec	c	s^{-1}
m/sec²	m	s^{-2}	10^2	cm/sec²	c	s^{-2}
kg	k		10^3	g	g	
kg/m³	m^{-3} k		10^{-3}	g/cm³	c^{-3} g	

beide eenheden. In zoverre is dus de getalfactor 10^{-7} in de definitie van de ampère opzettelijk, overigens echter is deze factor als willekeurig gekozen te beschouwen. Ook daarom is de ampère in het GIORGI-stelsel geen afgeleide, doch een zelfstandige of *grondeenheid* (unité principale). Uit het voorgaande blijkt, dat deze grondeenheid *absoluut* is, d.w.z. per definitie volgens een formule vastgesteld — dit in tegenstelling tot de zg. „internationale ampère" welke op een materiële standaard berust en welker waarde iets (zij het weinig) afwijkt van die der absolute ampère.

§ 8. Door het opnemen van genoemde getalfactor in de definitie van de grondeenheid van stroom is bereikt, dat men de *eenheid van spanning* direct kan afleiden uit de formule 1 *watt* = 1 *volt. ampère.* (cf. de definitie van de volt in N 1223; Toel. 1.1). Daarmede zijn in verband met de formule van GIORGI (zie **§ 5**) de electrische eenheden ingepast in het kader van het mks-stelsel. Uit deze formule volgt nl.:

$$\mathbf{1\ Nm/sec = 1\ J/sec = 1\ W.}$$

Dus wegens $1\ N = 1\ kg\ m\ sec^{-2}$ heeft men:

$$1\ W = 1\ Nm\ sec^{-1} = 1\ kg\ m^2sec^{-3}$$

Uit $1\ W = 1\ V\ A$ volgt dan: $1\ V = 1\ W{\cdot}A^{-1} = 1\ kg\ m^2\ sec^{-3}\ A^{-1}$.

Evenals de volt kunnen zo ook de andere electrische eenheden dimensionaal uitgedrukt worden in *m-k-s-A*. Ter vereenvoudiging van de dimensie-formules kan men met voordeel gebruik maken van het „hulpstelsel" *m-s-A-V*, dat *aequivalent* is aan het stelsel *m-k-s-A*. De volt is dan te beschouwen als een „substituut"-grondeenheid. In N 1223 zijn alle electrische eenheden geformuleerd in m-s-A-V.

§ 9. We hebben in **Tabel IV** zowel voor de *Giorgi-* als voor de *Gauszeenheden* uitdrukkingen opgenomen in de *grondeenheden* (dus resp. de dimensies in lengte, massa, tijd en stroom en in lengte, massa en tijd). Tevens is daar voor elk paar corresponderende maten de *verhouding* gegeven. De verhoudingsgetallen kan men controleren door in de Giorgi-eenheden te substitueren:

$$\mathbf{1\ A = 10^{-7/2}\ m^{1/2}\ k^{1/2}\ s^{-1}}\ \text{(cf. § 6)}$$

Voor de coulomb heeft men dan bijv.:

$$1\ C = 1\ s.A = 10^{-7/2}\ k^{1/2}\ m^{1/2} = 10^{-1}g^{1/2}\ c^{1/2} = 10^{-1}\ \textit{eme}\ \text{(v.l.)}$$

Bovendien kan men met behulp van **Tabel II** nog elke *eme* omzetten

in de bijbehorende *ese*, waarbij v op **3.10^{10}** gesteld kan worden. De *dimensie* van bijv. de ese van lading = dim. (eme v.l.). dim. (snelh.).

Dus 1 C = 10^{-1} *eme* = $10^{-1} g^{1/2} c^{1/2}$; 1 C = 3. 10^9*ese* = $3.10^9 g^{1/2} c^{3/2} s^{-1}$.

§ **10.** Naast het cgs- en mks-stelsel, die principiëel niet verschillen, neemt het *technische eenhedenstelsel* een geheel afzonderlijke plaats in (cf. § 2). Tot de grondeenheden van dit systeem behoort de *kilogramkracht* (kgf), waarmede de versnelling van de zwaartekracht aan dit stelsel gekoppeld is. Dit is voor de techniek zeer gemakkelijk, omdat zodoende alle krachten door gewichten gemeten kunnen worden. Het bezwaar is, dat genoemde versnelling niet constant is, hoewel dit voor de „*dagelijkse*" techniek te verwaarlozen verschillen betreft. *Theoretisch* is dit systeem echter *onbruikbaar*, niettegenstaande men de waarde van $\dot{g}$ gestandaardiseerd heeft (cf. N 950; 1.3.5). Immers, deze genormaliseerde waarde van $\dot{g}$ dient juist voor omzettingen van de technische in de absolute maten, terwijl de essentiële betekenis van het technische stelsel is, dat men *ter plaatse* in het zwaartekrachtveld van de aarde metingen verricht, welker uitkomsten dan weer gebruikt worden bij eventuele verdere berekeningen onder toepassing van het toch inderdaad handige technische maatstelsel. Zeker zijn er in de techniek ook vele onderwerpen (speciaal die de mechanica van de rotatie betreffen), waarbij $\dot{g}$ geen rol speelt en de toepassing van het absolute mks-stelsel slechts vereenvoudiging kan betekenen, maar toch zal de algehele invoering van dit selsel daar ongetwijfeld moeilijkheden met zich mede brengen. Als *overgangsmaatregel* beveelt de HCNN daarom aan, steeds naast uitkomsten in technische maten ook de herleidingen in Giorgi-eenheden te vermelden. Voor de versnelling van de zwaartekracht kan men dan stellen:

$$\dot{g} = \mathbf{9{,}81}\ (\text{m/sec}^2) \qquad *)$$

Voor de technische maten en hun waarden in Giorgi-eenheden zie men **Tabel VII.**

De *dimensie* van bijv. de eenheid van kracht = dim. (massa). dim. (versn.).

Zo is 1 kgf = 9,81. kg.m/sec^2 = 9,81 m k s^{-2} = 9,81 N.

---

*) Wij gebruiken hier voor deze grootheid het teken $\dot{g}$ (dus de letter g met een punt er boven), ter onderscheiding van g als gram. Immers, het onderscheid in cursieve en staande letter (zoals tot nu gebruikelijk) gaat verloren bij het gewone schrift, hetgeen ons speciaal bij het onderwijs als een bezwaar voorkomt.

Symbool	dimensie	Verhouding Giorgi-e Gauss-e	Symbool	dimensie
N	$m\ k\ s^{-2}$	10^5	dyn	$c\ g\ s^{-2}$
N/m²	$m^{-1}\ k\ s^{-2}$	10	dyn/cm²	$c^{-1}\ g\ s^{-2}$
Nm (J)	$m^2\ k\ s^{-2}$	10^7	**erg**	$c^2\ g\ s^{-2}$
Nm/sec	$m^2\ k\ s^{-3}$	10^7	erg/sec	$c^2\ g\ s^{-3}$
kgm²	$m^2\ k$	10^7	gcm²	$c^2\ g$
A	A	10^{-1}	eme	$c^{1/2}\ g^{1/2}\ s^{-1}$
V	$m^2\ k\ s^{-3}\ A^{-1}$	10^8	eme	$c^{3/2}\ g^{1/2}\ s^{-2}$
C	$s\ A$	10^{-1}	eme	$c^{1/2}\ g^{1/2}$
Ω	$m^2\ k\ s^{-3}\ A^{-2}$	10^9	eme	$c\ s^{-1}$
Wsec	$m^2\ k\ s^{-2}$	10^7	**eme**	$c^2\ g\ s^{-2}$
W	$m^2\ k\ s^{-3}$	10^7	eme	$c^2\ g\ s^{-3}$
S	$m^{-2}\ k^{-1}\ s^3\ A^2$	10^{-9}	eme	$c^{-1}\ s$
F	$m^{-2}\ k^{-1}\ s^4\ A^2$	10^{-9}	eme	$c^{-1}\ s^2$
H	$m^2\ k\ s^{-2}\ A^{-2}$	10^9	eme	c
Wb	$m^2\ k\ s^{-2}\ A^{-1}$	10^8	Mx	$c^{3/2}\ g^{1/2}\ s^{-1}$
Wb/m²	$k\ s^{-2}\ A^{-1}$	10^4	Gs	$c^{-1/2}\ g^{1/2}\ s^{-1}$
A/m	$m^{-1}\ A$	10^{-3}	(4π) Oe	$c^{-1/2}\ g^{1/2}\ s^{-1}$

V Decimale voorvoegingen

k = kilo = 10^3	m = milli = 10^{-3}
M = mega = 10^6	μ = mikro = 10^{-6}
T = tera = 10^{12}	p = piko = 10^{-12}

VI Eenheden passende in het MKS-stelsel (c.q. CGS-stelsel)

Grootheid	Eenheid	Symbool	Waarde
lengte	mikrometer of mikron	μm μ	10^{-6} m
massa	mikrogram of gamma	μg γ	10^{-6} g

Grootheid	Eenheid	Symbool	Waarde
druk	mikrobar	μbar (μb)	1 dyn/cm^2
	millibar	mbar (mb)	1 $kdyn/cm^2$
	bar	bar (b)	1 $Mdyn/cm^2$
abs. temp.	graad Kelvin	°K	°C $(^{+273})$
lichtsterkte	candela	cd	(nk)
helderheid	nit	nt	1 cd/m^2
lichtstroom	lumen	lm	1 cd sr
verlichting	lux	lx	1 cd sr/m^2
luidheid	foon	phon	

VII Technische Eenhedenstelsel

Grootheid	Eenheid	Symbool	Waarde
kracht	kilogram (kracht)	kgf	$\dot{g}$. N
druk	kgf per cm^2 of atmosfeer	kgf/cm^2 at	$\dot{g}.10^4N/m^2$
soortelijk gewicht	kgf per dm^3	kgf/dm^3	$\dot{g}.10^3N/m^3$
arbeid (energie)	kilogrammeter	kgfm	$\dot{g}$. Nm
effect (vermogen)	kgfm per sec	kgfm/sec	$\dot{g}$. Nm/sec
traagheids-moment	kgfm. sec^2	kgfm. sec^2	$\dot{g}$. kg m^2

versnelling van de zwaartekracht $\dot{g} = 9{,}81$ (m/sec^2)

VIII Eenheden in geen enkel stelsel passend

Grootheid	Eenheid	Symbool	Waarde
tijd	uur (hora)	h	3600 sec
volume	liter	l	~ 1 dm^3
druk	atmosfeer	atm	1013 mb

Grootheid	Eenheid	Symbool	Waarde
energie			
(arbeid)	calorie	cal	4,19 J
	kilocalorie	kcal	4,19 kJ
	kilowattuur	kWh	3,6 MWsec
vermogen			
(effect)	paardekracht	pk	735 Nm/sec
stroomsterkte	intern. ampère	(A)	∼ 1 A (abs.)
spanning	intern. volt	(V)	∼ 1 V (abs.)
weerstand	intern. ohm	(Ω)	∼ 1 Ω (abs.)

IX	**Decibelschaal**		
y/y_0	dB	y/y_0	dB
1	0	10	10
1,25893	1	10^2	20
1,58489	2	10^3	30
1,99526	3	10^4	40
2,51189	4	10^5	50
3,16228	5	10^6	60
3,98107	6	10^7	70
5,01187	7	10^8	80
6,30957	8	10^9	90
7,94328	9	10^{10}	100

Opm.: De decibelschaal (cf. N333, Toel. 11) kan voor *elke grootheid* en in *elk maatsysteem* worden toegepast. Is voor een bepaalde grootheid y de waarde in een bepaald maatsysteem en y_0 een gekozen grondwaarde, dan is het *niveau* of *peil*

$$^{10}\log y/y_0 \; \textit{bel} \; (B)$$

$$\text{of } 10 \,.\, ^{10}\log y/y_0 = 10 \,.\, (^{10}\log y - {}^{10}\log y_0) \; \textit{decibel} \; (dB).$$

Voor $y = y_0$ is het peil 0 dB (het *nulpeil*).

Met de formule is het niveau gemakkelijk te berekenen. De tabel is slechts bedoeld als overzicht van het verloop; wel kan men het peil er mee schatten, omdat bijv. voor 3981,07 het peil 6 + 30 = 36 dB is.

In sommige gevallen gaat men uit van y^2/y_0^2; dan zijn de niveauwaarden tweemaal zo groot.

KENNISMAKING MET HET GETAL e IN DE SCHOOLWISKUNDE,

door

DR L. M. DE HAAN

In dit tijdschrift (Euclides, 29, 1953/54, blz. 222—224) heeft DR P. G. J. Vredenduin laten zien, hoe men bij het schoolonderwijs het differentiëren van de exponentiële functies zou kunnen behandelen. Daarbij is het de schrijver, blijkens het slot van zijn artikel, er vooral om te doen, de leerlingen op eenvoudige wijze te laten kennismaken met het getal e. De methode die Dr Vredenduin aangeeft is echter naar mijn smaak nogal gekunsteld en ik meen, dat men beter op een andere manier te werk zou kunnen gaan. De bedoeling van dit artikel is nu, die andere methode kort te schetsen.

1. Uit de formule

$$(x^n)' = n \, . \, x^{n-1},$$

bewezen voor alle gehele (of misschien: alle rationale) waarden van n, volgt door omkering

$$x^{n-1} = \left(\frac{x^n}{n} + C\right)',$$

behalve wanneer $n = o$ *is*. Zo komen we tot de vraag: *is er een functie van* x, *die* $\frac{1}{x}$ *als afgeleide heeft?*

2. Dat er inderdaad een dergelijke functie bestaat, bepaald tot op een constante, laten wij zien door enkele integraalkrommen te tekenen, bijv. die welke resp. door de punten (1,0), (1,1) en (1,2) gaan. Zo'n integraalkromme (deze naam noemen wij er natuurlijk niet bij) benaderen wij eerst op voor de hand liggende wijze door gebroken lijnen, waarvan elk segment als richtingscoëfficiënt heeft: het omgekeerde van de abscis van zijn linkerrandpunt. Voor deze abscissen nemen wij bij de eerste gebroken lijn 1, 2, 3, . . ., bij de tweede $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$, bij de derde $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$ Deze laatste gebroken lijn (bijv.) vervangen wij met een beroep op de intuïtie door een uit de hand getrokken vloeiende kromme.

3. De kromme door (1,0) die men op deze wijze vindt, vertoont een sprekende overeenkomst met de vroeger behandelde grafieken van de functies $\overset{2}{\log}\, x$, $\overset{3}{\log}\, x$, enz. *Wij vermoeden dus, dat de functie ln x, voor positieve waarden van x gedefinieerd door*

$$\begin{cases} (\ln x)' = \dfrac{1}{x} \dots \text{(I)} \\ \ln 1 = 0 \dots \text{(II)} \end{cases}$$

een logarithmische functie is.
[Wie bezwaar heeft tegen de zuiver formele invoering van het functiesymbool *ln x*, schrijve voorlopig $f(x)$].

Als ons vermoeden juist is, is het grondtal die waarde van x, waarbij de functiewaarde 1 behoort. Blijkens de grafiek is er tussen 2 en 3 een dergelijk „eenheidspunt" van de functie aanwezig. Noemen wij dit e, *dan is het getal e dus gedefinieerd door*

$$\ln e = 1 \dots \text{(III)}.$$

4. Met behulp van de definitie-vergelijkingen (I) en (II) kan nu verder gemakkelijk worden aangetoond dat de functie *ln x* de bekende eigenschappen van een logarithmische functie bezit, bijv.

$$\ln x^a = a \,.\, \ln x \dots \text{(IV)}.$$

De bewijzen gaan aldus: Uit (I) volgt, dat beide leden de zelfde afgeleide en dus een constant verschil hebben; door in beide leden $x = 1$ te nemen blijkt i.v.m. (II), dat dit verschil nul is.

5. Door $x = e$ te substitueren in (IV) komt er, wegens (III),

$$\ln e^a = a \dots \text{(V)}.$$

Wij denken ons hierin a variabel $(-\infty < a < \infty)$ en stellen $e^a = x$. Dan is $a = \overset{e}{\log}\, x$ en gaat (V) over in

$$\ln x = \overset{e}{\log}\, x, \quad (0 < x < \infty).$$

Inderdaad is dus ln x een logarithmische functie en e is het bijbehorende grondtal.
(Nu kan ook de betekenis van het functiesymbool *ln x* verklaard worden).

6. Om nu verder iets naders over e aan de weet te komen, kunnen we of meetkundig of analytisch te werk gaan. In dit nr. doen we het eerste, in het volgende het tweede.

We hebben de grafiek van *ln x* door limietovergang verkregen uit een variabele gebroken lijn G_n, waarvan elk segment een richtingscoëfficiënt heeft gelijk aan het omgekeerde van de abscis van het linkerrandpunt en een lengte die voor $n \to \infty$ de limiet nul

heeft. Dit laatste kunnen we, anders dan in nr 2, ook bereiken door de *ordinaten* van de hoekpunten van G_n met gelijke verschillen te laten toenemen en deze verschillen onbepaald te laten afnemen voor onbepaald toenemende waarden van n. Hiervan kunnen we gebruik maken om het punt (e^ξ, ξ) van de kromme $y = \ln x$ te verkrijgen als limiet van het snijpunt der rechte $y = \xi$ met een gebroken lijn G_n van de hiervoor aangegeven soort, waarbij de ordinaten der succ. hoekpunten opklimmen met $\frac{\xi}{n}$. Beschouw nl. een willekeurig segment van een dergl. G_n en laat (x_l, y_l) daarvan het linker- en (x_r, y_r) het rechter-randpunt zijn. Dan is dus $y_r - y_l = \frac{\xi}{n}$, terwijl de richtingscoëfficiënt $\frac{y_r - y_l}{x_r - x_l}$ gelijk is aan $\frac{1}{x_l}$.

Dit geeft

$$\frac{\frac{\xi}{n}}{x_r - x_l} = \frac{1}{x_l} \quad \text{of} \quad x_r = \left(1 + \frac{\xi}{n}\right) . \ x_l$$

Hoekpunten van de hier beschouwde G_n zijn dus

$$\ldots, (1,0), \left(1 + \frac{\xi}{n}, \frac{\xi}{n}\right), \left((1 + \frac{\xi}{n})^2, \frac{2\xi}{n}\right), \ldots, \left((1 + \frac{\xi}{n})^n, \xi\right), \ldots$$

Het laatst opgeschreven punt is blijkbaar het snijpunt van G_n met de rechte $y = \xi$. Daar dit, als $n \to \infty$, overgaat in het punt (e^ξ, ξ), (zoals we hier bewezen aannemen), volgt

$$e^\xi = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\xi}{n}\right)^n,$$

en in 't bijzonder

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

7. Voor de analytische behandeling knopen wij aan bij (V). In deze formule vervangen wij a door x en vervolgens differentiëren wij beide leden naar x. Dit geeft

$$\frac{1}{e^x} . (e^x)' = 1 \quad \text{of} \quad (e^x)' = e^x.$$

Op dezelfde manier als door Dr Vredenduin werd aangegeven (sub 2d, blz. 224), komen we hieruit tot de machtreeks voor e^x. We substitueren hierin $x = 1$ en berekenen $e = 2{,}71828\ldots$

Opmerking.

De omvang van het voorgaande is rijkelijk groot voor een onderwerp dat men „voor de aardigheid" behandelt.

Men kan intussen desgewenst gemakkelijk bekorten: wanneer men nr. 6 weglaat, vormt het overblijvende nog altijd een geheel.

Wie er daarentegen voor voelt, nog iets meer te geven, kan het voorgaande gemakkelijk wat uitbreiden. Zo kan men resp. uit

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \text{en} \quad \ln a \,.\, {}^{a}\!\log x = \ln x$$

$(a > 0)$ door differentiatie afleiden

$$(a^x)' = a^x \,.\, \ln a \,; \quad ({}^{a}\!\log x)' = \frac{1}{x \,.\, \ln a}.$$

Verder kan men uit

$$\ln'(1 + x) = \frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - \ldots \quad (|x| < 1)$$

door integratie-term-voor-term de machtreeks voor $\ln (1 + x)$ vinden.

UIT DE PRACTIJK.

Wiskunde-opdrachten voor een werkweek.

Het komt de laatste tijd steeds vaker voor, dàt een school voor een der klassen een werkweek gaat organiseren. Eén der voordelen van zo'n werkweek is, dat een bepaald onderdeel van een vak op een geheel andere, intensere manier met de leerlingen behandeld kan worden dan op school.

We komen er op school bijvoorbeeld niet gemakkelijk toe in de Stereometrie-lessen, wanneer we het maken van uitslagen bespreken, de uitgeslagen lichamen ook werkelijk te vervaardigen. En toch wordt de werkelijke betekenis van het maken van een uitslag pas duidelijk bij het vervaardigen van het voorwerp. Ook het verband tussen een projectiefiguur en een uitslag komt in de gewone lessen meestal niet ter sprake. In de Beschrijvende Meetkunde leren onze leerlingen ware groottes bepalen van lijnstukken en hoeken, maar doordat ze deze nooit verder gebruiken, blijven deze constructies maar theoretische kwesties.

Deze overwegingen brachten mij ertoe, toen er een werkweek voorbereid werd voor de leerlingen van de vierde en vijfde klas van de (zesjarige) H.B.S.-B voor meisjes te Groningen, om opdrachten te vervaardigen, die het maken van projectie-tekeningen, uitslagen en het daarna in elkaar zetten van de getekende lichamen bevatten.

Omdat misschien deze opdrachten ook voor anderen bruikbaar zijn, doe ik ze hieronder volgen. Vooraf moet ik echter eerst mededelen wat aan deze opdrachten vooraf ging. De vierde klas heeft nog geen Beschrijvende Meetkunde. Maar ter voorbereiding daarvan laat ik al wel twee projecties tekenen van eenvoudige lichamen. Daarbij leer ik coördinaten gebruiken, zodat de opdrachten voor de werkweek ook met coördinaten opgegeven konden worden.

In de aan de werkweek voorafgaande lessen liet ik projecties tekenen van pyramides en omwentelingskegels en uitslagen daarvan construeren. Later liet ik deze pyramides en kegels doorsnijden met een loodrecht op het verticale vlak staande balk. Ook nu werden uitslagen geconstrueerd. Ware lengtes konden uit de projecties worden afgelezen of worden gevonden door de pyramide of kegel zo te draaien, dat de betreffende ribbe evenwijdig kwam met het verticale vlak.

De kegelsneden, die bij deze constructies optraden, waren behandeld bij de Vlakke Meetkunde.

Ik moet hierbij opmerken, dat enkele omstandigheden gunstig werkten:

a. Onze school is een zesjarige opleiding, dat verschaft veel tijd voor werk als dit.

b. Deze vierde klas was een over het algemeen intelligente en in ieder geval zeer ijverige en belangstellende klas, die vooral ook het zelfstandig zoeken van een oplossing graag beoefende.

c. Op de lesrooster heb ik iedere week in de hogere klassen eenmaal twee lesuren achter elkaar. Het is dan mogelijk een projectie opgave met uitslag en al achter elkaar af te werken.

Tijdens de werkweek was de klas gesplitst in twee groepen van 8 leerlingen. Elk der groepen had dagelijks twee uur les. Het bleek dat door de voorbereidingen de leerlingen in staat waren om zonder veel hulp van mijn kant gezamenlijk de opgaven uit te voeren. Er was een zeer prettige onderlinge samenwerking en de animo was zo groot, dat enkelen, die niet klaar dreigden te komen ook in de vrije tijd aan de uitvoering van de opdrachten doorwerkten. Oorspronkelijk had ik de vierde opdracht bedoeld voor de vluggers, maar alle leerlingen stelden er prijs op deze uit te voeren. De ermee samenhangende problemen (o.a. uitslag van een scheve cirkelkegel) werden met liefde bestudeerd.

De vijfde klas had, toen de werkweek begon, ruim een half jaar Beschrijvende Meetkunde gehad en daarin behandeld de grondconstructies met lijnen en vlakken. Aan de beurt van behandelen was het neerslaan van vlakken. Om dit duidelijk te maken aan de hand van een model en tevens om het bijzondere gemak van een nieuw („vierde") projectievlak te demonstreren maakte ik de opdracht voor deze klas. Deze klas bestond uit 10 leerlingen, die met elkaar één groep vormden, die ook dagelijks (5 dagen lang) 2 uur les hadden. Ook zij konden voor een groot deel de opgave zelfstandig uitvoeren en hadden er veel plezier in, vooral toen een der vluggen begon met haar model in elkaar te zetten en de anderen daardoor zagen hoe het werd. Ik heb na de werkweek mijn eigen model reeds herhaalde malen kunnen gebruiken als het vierde projectievlak of het neerslaan van een vlak ter sprake kwam. De leerlingen zullen dus thuis hun model zeker ook gebruiken.

Een der moeilijkheden van de opdracht van de vijfde klas, die soms een leerling wel eens wanhopig dreigde te maken, was dat de

constructies van de verschillende onderdelen zo nauwkeurig uitgevoerd moesten worden, dat ze later in elkaar pasten. Daarvoor wees ik ze op verschillende contrôlemogelijkheden, waartoe onder meer behoorde de affiniteit tussen de neergeslagen doorsnede en de projectie daarvan. Het zeer nauwkeurig construeren is tijdens deze werkweek wel bevorderd.

Hier volgen nu de opdrachten in de vorm, waarin ze aan de leerlingen werden verstrekt. Materiaal werd gezamenlijk ingekocht en kostte elke leerling 60 cent.

Groningen. G. Krooshof.

4B. *Opdrachten Werkweek* 1954.

A. *Doel:* Er worden enige Stereometrische lichamen vervaardigd. Hiervan worden als werktekeningen eerst twee projecties getekend en uitslagen gemaakt.

B. *Materiaal:* Wit ivoorkarton (dit wordt gemeenschappelijk aangeschaft), plaksel (idem), schaar, zwart en rood potlood, een goede liniaal met centimeter-verdeling, passer, driehoeken.

C. *Opdrachten:*

1. *Een regelmatige zeszijdige pyramide, doorsneden door een regelmatig vierzijdig prisma (balk).*

   a. Werktekeningen en uitslagen hiervan zijn al op school gemaakt. Deze moeten dus worden meegebracht.

   b. De eerste projectie (bovenaanzicht) van het grondvlak van de pyramide is een regelmatige zeshoek met een zijde van 7 cm. Het middelpunt van deze zeshoek, tevens de eerste projectie van de top van de pyramide is het punt (10,7,0). De hoogte van de pyramide is 16 cm.

   c. De tweede projectie (vooraanzicht) van het prisma is een vierkant met een zijde van 6 cm. De hoekpunten van dit vierkant zijn de punten (8,0,3), (8,0,9), (14,0,3) en (14,0,9).
   De lengte van het prisma is 14 cm.

2. *Een omwentelingskegel, doorsneden door een balk.*

   a. Vervang bij de vorige opdracht de pyramide door een omwentelingskegel waarvan het middelpunt weer

het punt (10,7,0) is en de hoogte 16 cm, terwijl de straal van de grondcirkel 7 cm is. Plaats de balk weer op dezelfde manier als bij de vorige opdracht.

b. Teken eerst de beide projecties van kegel en balk. Construeer daarin de eerste projectie van de doorsnede.

c. Verdeel voor het maken van de uitslag de grondcirkel van de kegel in 12 gelijke delen. Trek daarvoor eerst twee loodrecht op elkaar staande middellijnen, waarvan er een evenwijdig is met de x-as. De uiteinden van deze middellijnen zijn vier van de twaalf deelpunten. Trek de 12 beschrijvende lijnen, die naar die deelpunten gaan en bepaal de ware lengtes van de afstanden van de punten der doorsnijding op deze beschrijvende lijnen tot de top door ze evenwijdig te draaien met het tweede projectievlak.

d. Een deel van de doorsnijding is een stuk hyperbool. Om daarvan de uitslag nauwkeurig te krijgen zal het wel nodig zijn enkele beschrijvende lijnen meer te tekenen.

3. *Een prismoide.*

a. Van deze prismoide zijn grond- en bovenvlak evenwijdig. De afstand van de beide vlakken is 12 cm. De horizontale projectie van het grondvlak is een vierkant met een zijde van 14 cm. Het middelpunt daarvan is het punt (8,8,0), een van de zijden is evenwijdig met de x-as.
De horizontale projectie van het bovenvlak is een vierkant met het zelfde middelpunt. De diagonalen daarvan zijn evenwijdig met de zijden van het eerstgenoemde vierkant en zijn 8 cm lang.

b. De opstaande zijvlakken van de prismoide zijn nu driehoeken. Noem de hoekpunten van het grondvlak A, B, C en D, die van het bovenvlak E, F, G en H, zo, dat E ligt tussen A en B, F tussen B en C enz.

3. c. Teken nu ook de tweede projectie van de prismoide.

d. Maak de uitslag van de prismoide, met ook grond- en bovenvlak er aan vast. Dat zal veel van je nauwkeurigheid vergen. Vergeet de plakrandjes niet. Zet daarna het lichaam in elkaar.

4. Zou je nog tijd overhouden, dan zou je de volgende moeilijke opgave nog kunnen proberen. Je maakt dan een prismoide, net als de vorige, waarbij echter het bovenvlak een cirkel met een straal van 4 cm is. Je kunt dan op die cirkel de hoekpunten E, F, G en H van het vierkant weer plaatsen. Het zijdelings oppervlak van de prismoide kun je dan laten bestaan uit vier driehoeken ABE, BCF, CDG en DAH en aan de vier hoeken telkens een vierde gedeelte van een scheve cirkel kegel. Dit is zoals je begrijpt een echte opgave voor de „liefhebbers''.

5B. *Opdracht werkweek 1954.*

A. *Doel.*

We vervaardigen uit wit karton een model van een regelmatige vijfzijdige pyramide, die door een vlak W doorsneden wordt.
De doorsnede wordt bewegelijk gemaakt, evenals de drie projectievlakken, zodat het neerslaan daarvan gedemonstreerd kan worden.

B. *Materialen.*

Anderhalf à twee vel wit ivoorkarton, formaat 522.637 mm., twee driehoeken, goede liniaal met centimeter-verdeling, passer, schaar, zwart potlood, rood potlood of rode ballpoint, gum, (het karton wordt gezamenlijk aangeschaft, een *lange* liniaal zal goede diensten bewijzen).

C. *Tekenwerk.*

1. Neem eèn vel karton en trek daarop een *x*-as evenwijdig met de *lange* zijden, 30 cm van de *onderkant.*
Neem op deze x-as de oorsprong $27\frac{1}{2}$ cm van de *linkerkant,* Trek dan de y- en de z-as.
2. *Teken nu de drie projecties van de regelmatige vijfzijdige pyramide met de volgende gegevens:*
Het middelpunt M van het grondvlak is het punt ($17\frac{1}{2}$, 7, 0).
De straal van de omgeschreven cirkel van het grondvlak is 7 cm. Het hoekpunt E van het grondvlak is het eindpunt van de middellijn, die loodrecht op de x-as staat. E is het punt, dat het verst van de x-as afligt. Het hoekpunt A ligt rechts van E.
De hoogte van de pyramide is 16 cm.

3. *Teken de eerste en tweede doorgang van het vlak W met de volgende gegevens:*
W gaat door de punten ($34\frac{1}{2}$, 0, 0), ($17\frac{1}{2}$, 17, 0) en (0, 0, 20).
4. *Teken de u-as van een vierde projectievlak, loodrecht op* W_1 *door het punt* (1, 0, 0).
5. *Teken nu de vierde projectie van de pyramide en de vierde doorgang van W.*
6. Construeer nu de drie projecties van de doorsnede van W met de pyramide en ook de ware grootte daarvan door W in H neer te slaan.

D. *Hulpstukken.*

1. Knip uit een nieuw vel karton een rechthoek van 40 bij 23 cm. Vouw langs een der lange en ook langs een der korte zijden een plakrand om van 1 cm breedte. Construeer nu op het resterende stuk de vierde projectie en de vierde doorgang van W en ook de cirkelbogen, die voor het neerslaan van de doorsnede nodig waren.
2. Knip verder een rechthoekig trapezium uit, waarvan de lange zijde gelijk is aan het stuk van de eerste doorgang van W, dat ligt tussen de x-as en de u-as. De rechthoekszijde is $18\frac{1}{2}$ cm. De scherpe hoek moet gelijk zijn aan de ware grootte van de hoek tussen de eerste en tweede doorgang van W. Deze hoek moet in het neergeslagen vlak W in H geconstrueerd worden.
3. Construeer op dit trapezium de ware grootte van de doorsnede maar vouw eerst langs de lange zijde een plakstrook van 1 cm breedte. Teken deze doorsnede aan weerskanten van het karton.

D. 4. Construeer de uitslag van het zijdelings oppervlak van de pyramide met daarop de snijlijnen van de zijvlakken met W.
Neem het hoekpunt C van het grondvlak aan de buitenkant (1).
5. Knip het onderste stuk van de uitslag uit, maar neem bij elk der zijden van het grondvlak een plakstrook en ook aan een der opstaande zijkanten.
6. Construeer het bovenste stuk van de uitslag opnieuw, zodat bij elk der zijden van de doorsnede een plak-

strook geknipt kan worden. Natuurlijk ook weer een plakstrook aan een der zijkanten.

(1). Het verdient aanbeveling bij het construeren van deze uitslagen de lengtes der zijden steeds weer te controleren door vergelijken met bekende lijnstukken in de tekeningen. De ware lengtes der opstaande ribben en ook van de afstanden daarop tot de hoekpunten van de doorsnede zijn af te lezen op de *derde projectie* van de ribbe TE.

E. *Het monteren.*

1. Begin met het in elkaar plakken van de beide delen van de pyramide. Vouwlijnen moeten eerst geritst worden.
2. Het onderste deel van de pyramide wordt met de plakstroken op H bevestigd.
3. Het bovenste deel van de pyramide wordt met de plakstroken bevestigd op het eerder getekende en geknipte trapezium, dat een deel van het vlak W voorstelt.
4. Dat deel van W wordt nu met de plakstrook op H bevestigd. Bevestig de plakstrook aan de *linkerkant* van W_1.
5. Het losse vierde projectievlak wordt met de plakstrook op H bevestigd, de plakstrook aan de linkerkant van de u-as.
6. De y-as, die langs het *horizontale* vlak loopt, wordt doorgeknipt tot aan de oorsprong. De y-as die langs het derde projectievlak loopt en ook de z-as worden geritst.
7. Nu kan het stuk karton, dat zich bevindt tussen het horizontale en het derde projectievlak onder H geschoven worden, waardoor het tweede en derde projectievlak rechtop komen te staan en het model is klaar.

NEDERLANDSE VERENIGING VOOR LOGICA EN WIJSBEGEERTE DER EXACTE WETENSCHAPPEN

Op 23 October vond de jaarlijkse ledenvergadering van de Nederlandse Vereniging voor Logica en Wijsbegeerte der exacte wetenschappen te Utrecht plaats, ter inluiding van het achtste verenigingsjaar.

Uit het jaarverslag over het zevende verenigingsjaar bleek, dat de vereniging een bevredigende activiteit op het door haar bestreken gebied ten toon spreidt. De wetenschappelijke bijeenkomsten omvatten:

17 oct. '53	Prof. Dr. A. Heyting	De taak van de filosofie der wetenschappen.
12 dec. '53	Herman Meyer	Het eenheid stichtende oordeel in de natuurwetenschap.
23 jan. '54	Ir. R. Vermeulen	De waardering van hypothesen.
10 april '54	Dr. L. M. de Rijck	Abélard als middeleeuws logicus.
8 mei '54	Prof. Dr. Th. Skolem, Oslo	The nature of Arithmetics.

Verder werd, in samenwerking met het Genootschap voor Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde en Natuurwetenschappen, op 1 September een herdenkings-plechtigheid te Purmerend gehouden, ter gelegenheid van de 300-jarige geboorte-dag van Bernard Nieuwentyt, waarbij het Gemeentebestuur alle medewerking verleende. In aansluiting hieraan werd, des namiddags, een wetenschappelijke bijeenkomst gehouden, waar verschillende buitenlandse sprekers het woord voerden. Na afsluiting van de werkzaamheden in het daaraan voorafgaande jaar, werd, in opdracht van het bestuur der vereniging, door Prof. Dr. E. W. Beth, een brochure uitgegeven: „De betekenis van de wijsbegeerte als universitair studievak en als terrein voor wetenschappelijk onderzoek", welke voor de algemene gedachtenwisseling over dit onderwerp ongetwijfeld verhelderend heeft gewerkt.

Het secretariaat der vereniging blijft gevestigd: Cort van der Lindenlaan 12, Enschede.

BOEKBESPREKING.

Dr L. N. H. Bunt, *Geschiedenis van de Wiskunde als onderwerp voor het Gymnasium A. Verslag van een proefneming. A. Geschiedenis, inrichting en resultaten van het onderzoek. B. De gebezigde tekst.* Acta Paedagogica Ultrajectina. Uitgave van het Paedagogisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht. — J. B. Wolters, Groningen Djakarta. 1954. A. *f* 1.25. B. *f* 4.90.

Deze publicatie van het Paedagogisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht bevat een gedeeltelijk verslag van een proefneming die onder leiding van den conservator Dr Bunt gedurende de cursusjaren 1951—52 en 1952—53 aan vijf α-afdelingen van Nederlandse gymnasia is genomen met een nieuwe vorm van wiskunde-onderwijs. De aangebrachte wijziging bestond hierin, dat een deel van de algebra door statistiek en een deel van de stereometrie door geschiedenis van de wiskunde vervangen werd. Van de ervaringen met het laatste opgedaan wordt thans een verslag gegeven, terwijl een vervolg over de statistiek in het vooruitzicht wordt gesteld.

De schrijver vertelt uitvoerig over de wijze waarop het plan voor de vernieuwing van het α-onderwijs in wiskunde is opgevat en uitgewerkt en over de bij de uitvoering opgedane ervaringen. Hij wijst de voordelen aan die aan de nieuwe methode verbonden zijn en weerlegt bezwaren die men gemeend heeft er tegen te kunnen aanvoeren. Zijn conclusie is, dat de proef als geslaagd mag worden beschouwd. Op de scholen die er aan hebben meegewerkt zal het onderwijs in de geschiedenis der wiskunde op de α-afdelingen worden voortgezet. De schrijver spreekt de hoop uit, dat men zich ook op de β-afdelingen zal gaan afvragen, of er geen aanleiding bestaat, iets in de nieuwe richting te gaan doen. Aan het verslag is de bij de proef gebezigde tekst toegevoegd, die ook als afzonderlijke uitgave verkrijgbaar is gesteld (zie beneden).

De verschijning van de publicatie van Dr Bunt moet om twee

redenen als een zeer belangrijke gebeurtenis in de geschiedenis van het Nederlandse wiskunde-onderwijs worden beschouwd. Vooreerst om de waarde van de vernieuwing waarvan hier bericht wordt. Reeds jaren lang is de wiskunde op het α-Gymnasium een zorgelijke en onverkwikkelijke aangelegenheid geweest. Er is thans een mogelijkheid geopend, de voornaamste bezwaren die er tegen konden worden ingebracht, te vermijden en er een harmonisch bestanddeel van het in deze afdeling gegeven onderwijs van te maken. Vervolgens echter om de wijze waarop deze vernieuwing is aangepakt en tot stand gebracht. Het plan is uit onderwijskringen spontaan naar voren gekomen en op methodisch onberispelijke wijze op de proef gesteld. Wie op enig punt ons onderwijs wil hervormen kan hier leren, hoe hij te werk moet gaan.

Wij kunnen deze bespreking dan ook eindigen met een woord van oprechte hulde aan Dr Bunt en de docenten H. J. Boom, Dr Cath. Faber-Gouwentak, Zr E. A. de Jong, D. Leujes, Dr H. Mooij en Dr P. G. J. Vredenduin voor wat zij in het belang van het Nederlandse wiskunde-onderwijs hebben gedaan.

E. J. Dijksterhuis

Dr L. N. H. Bunt met medewerking van Dr Cath. Faber-Gouwentak, Zr A. E. de Jong, D. Leujes, Dr H. Mooij en Dr P. G. J. Vredenduin, *Van Ahmes tot Euclides. Hoofdstukken uit de geschiedenis der Wiskunde.* — J. B. Wolters, Groningen, Djakarta. 1954. ing. *f* 4.90; geb. *f* 5.50.

Dit is het schoolboek voor onderwijs in de geschiedenis der antieke wiskunde, dat voortgekomen is uit de boven besproken proef met een nieuwe methode voor het wiskunde-onderwijs aan de α-afdeling van het Gymnasium. Het is in hoofdzaak gewijd aan de wiskunde bij de Grieken, maar de hierover handelende hoofdstukken worden door drie andere voorafgegaan, waarin de Aegyptische en Babylonische wiskunden behandeld worden en de ontwikkeling van het getalsysteem (lees: cijferschrift) tot het thans toegepaste positiestelsel. Na een hoofdstuk over het begin van de Griekse wiskunde en een over Pythagoras en de Pythagoraeërs wordt met een behandeling van de maantjesquadratuur van Hippokrates en van de drie klassieke problemen het strikt mathematische terrein betreden. Meer wijsgerig van aard zijn de hierna volgende hoofdstukken over Plato en Aristoteles. Vervolgens wordt het eerste boek van Euclides

vrijwel volledig gegeven. Voor ieder hoofdstuk is een stel herhalingsvragen toegevoegd.

Aan wat boven over het belang van de proef van Dr Bunt c.s. gezegd werd zal hier geen speciaal woord van aanbeveling voor deze schooluitgave meer toegevoegd behoeven te worden. Uit practische ervaringen van competente auteurs gegroeid heeft zij haar bruikbaarheid in de practijk reeds bewezen. Moge aan dit boek het succes ten deel vallen dat het zo ten volle verdient.

E. J. Dijksterhuis

INGEKOMEN BOEKEN

Van J. B. Wolters, Groningen.

B. Coster, Dr. A. van Dop en Dr. H. Streefkerk, Algebra voor het eindexamen, 2e druk, f 3,25.

Dr. A. van Dop en Dr. A. van Haselen, Stereometrie voor V. H. en M.O., 3e druk, f 3,25.

Van Thijn's Wiskundige leergang, Leerboek der vlakke driehoeksmeting, 24e druk door E. J. Wasscher, f 2.65.

Dr. Joh. H. Wansink, Reken- en stelkunde voor het Middelbaar en Voorbereidend Hoger Onderwijs, deel II, 6e druk, f 3,10

Van P. Noordhoff, Groningen.

C. J. Alders, Vlakke Meetkunde voor M.O. en V.H.O. 17e/19e druk, f 3,35.

Drs. D. K. Heyt, Nieuwe School-Algebra van Wijdenes en Beth deel 1, 21ste druk, f 3,50.

P. Wijdenes, Planimetrie, Een eenvoudig schoolboek voor het onderwijs in de vlakke meetkunde deel I — 7de druk, f 2,40.

Van J. B. Wolters, Groningen.

Dr. D. N. van der Neut en Drs. A. Holwerda. Derde deel, 7e druk, f 1,65.

Van Thijn's Wiskundige leergang.

Algebraïsche vraagstukken II, 15e druk door E. J. Wasscher, f 2,30.

Verzameling Planimetrische vraagstukken, met Supplement, 19e druk door E. J. Wasscher, f 2,25.

Trigonometrie voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs Tweede afdeling voor de B-klasse van H.B.S. en Gymnasium door E. J. Wasscher, f 1,80.

Dr. P. G. J. Vredenduin en Dr. A. van Haselen, Nieuwe Algebra deel IV, f 3,25.

Dr. Joh. H. Wansink, Drs. A. Holwerda en Dr. D. N. van der Neut, Beschrijvende Meetkunde, 3e druk, f 2,25.

A. R. Jonker en H. J. Zijderveld, Linea recta, Meetkunde voor Mulo scholen, deel II, 3e druk, f 2.75.

Verslag van het Tiende Congres van leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen gehouden op 22 April 1954 te Amsterdam, Congres 1954, f 1,50.

A. R. Jonker en H. J. Zijderveld, Wis en zeker. Algebra voor Mulo scholen, deel I, 2e druk, f 1,75.

Dr. A. van Dop en Dr. A. van Haselen. Vlakke Meetkunde voor V.H. en M.O. deel III, 2e druk, f 2,40.

Ir. G. L. Ludolph en Ir. R. J. Legger, Leerboek der Mechanica, 14e druk, f 7,90.

Antwoorden op de vraagstukken van deel II van het leerboek der Mechanica (Sterkteleer), f 0,75.

Dr. A. G. M. van Melsen, De wijsbegeerte der exacte wetenschap. Inaugurale rede te Groningen, f 1,25.

Dr. F. van der Blij, Mathematica en de dochters van Mnemosyne. Inaugurale rede te Utrecht, f 1,25.

Drs. I. Abram, Inleiding in de Stereometrie, 5e druk, f 2,50.

Dr. A. van Dop en Dr. A. van Haselen, Vlakke Meetkunde voor V.H. en M.O., Eerste deel, 3e druk, f 1,90.

Dr. D. N. van der Neut en Drs. A. Holwerda, Meetkunde van de ruimte, 3e druk, f 2,75.

Van N.V. W. J. Thieme en Cie, Zutphen.

Drs. F. W. van der Wilt, Toegepaste wiskunde en rekentechniek.

Dr. W. Bleeker, Meten en schatten van Metereologische grootheden.

BOEKAANKONDIGING

P. S. Alexandroff, Einführung in die Gruppentheorie, 2e druk. 102 blz. en een aanhangsel van 12 blz. met elementaire begrippen uit de verzamelingsleer.

L. S. Sominski, Die Methode der vollständigen Induktion, 2e druk 55 blz.

P. P. Korowkin, Ungleichungen, 56 blz.

A. O. Gelfond, Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (Diophantische Gleichungen). 59 blz.

Vier deeltjes uit de „Kleine Ergänzungensreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik" onder leiding van Prof. Dr. H. Karl, Potsdam. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

Alle vier vertaald uit het Russisch.

Deze deeltjes zijn de eerste boekjes, die „Euclides" ontvangen heeft uit de Russische invloedssfeer. Ze zijn bedoeld voor de hoogste klasse van de „Oberschule" in Oost-Duitsland.

De stof wordt buitengewoon bevattelijk behandeld, toegelicht met vele uitgebreide opgaven, die geleidelijk in moeilijkheid opklimmen. Alle vier gaan boven de in ons land gebruikelijke leerstof uit, maar voor schoolbibliotheken zijn ze zeer geschikt. Een goede leerling kan zonder hulp (of met enkele aanwijzingen) de stof begrijpen en voor de docent staan er vele voorbeelden in, waarmee hij de les kan illustreren. In een goede klasse zou best als proef wat behandeld kunnen worden b.v. uit het deeltje over groepentheorie.

Hierin staan vele voorbeelden, die uitstekend geschikt zijn als inleiding voor de abstracte theorie.

Behalve deze vier zijn tot nu in deze reeks 7 deeltjes verschenen n.l. nog over:

Die Fibonaccischen Zahlen.

Algebraischen Gleichungen beliebigen Grades, en

Bemerkenswerte Kurven.

De prijs staat er niet bij aangegeven en of ze hier in de boekhandel besteld kunnen worden, is me niet bekend.

H. M.

KORREL CXIV.

Secans en *cosecans.*[1])

Bij het doorbladeren van enige schoolboeken, die mij aanleiding gaven tot het schrijven van een vorige korrel, werd mijn aandacht getrokken door de aandoenlijke zorg, waarmee de fossielen secans en cosecans worden behandeld. Uit drie schoolboeken:

1. Van een paragraaf met 18 vraagstukjes zijn er 14 met sec of cosec of beide; in de volgende 11 van de 24, dus samen 25 van de 42! Wat zit er voor leerstof in b.v. (vet gedrukt): $|\sec (2k+1)\,90^\circ + \alpha| = |\operatorname{cosec} \alpha|$. Heeft iemand van U zo iets ooit nodig gehad? Herleidingen als:
$\dfrac{\operatorname{cotg}(360^\circ - \alpha)\operatorname{cosec}(270^\circ + \alpha)}{\operatorname{cotg}(-\alpha)\sec(180^\circ + \alpha)}$; $\sqrt[3]{\operatorname{cosec}^9 \alpha}$ en meer van dat fraaie slag.

2. Dik gedrukt om er de aandacht op te laten vallen: „De logarithme van de cosecans van een hoek is het tegengestelde van de logarithme van de sinus van die hoek". Niemand heeft dit ooit gebruikt, eenvoudig, omdat dit niet voorkomt, nergens en nooit . . . Toch wel aardige leerstof voor kinderen. Stof, ja, in de dagelijkse betekenis van het woord: vuil, dat men moet opvegen.

Opgaven als $\log \sec 21^\circ 15' 7''$ en dat bij het gebruik van een tafel in 4 dec.! Getuige de rest, waar men nochtans ziet, dat er 5 cijfers teruggezocht worden!

Verderop is de schrijver totaal kwijt, dat $\dfrac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$ is; $R = \dfrac{a}{2 \sin \alpha}$. Mij dunkt, dat hij moest zetten $R = \frac{1}{2} a \operatorname{cosec} \alpha$, gezien de bijzondere zorg, waarmee cosec en sec in de eerste 30 à 40 bladzijden worden behandeld.

3. In de theorie schering en inslag sec en cosec; ieder heeft genoeg aan sin, cos, tg en cotg; cotg kan er wel mee onderdoor, vooral omdat de tafel die tegelijk met de tg geeft.

Maar wat voor zin heeft het om op te nemen en te laten uitwerken: $\dfrac{\sin \alpha - \operatorname{cosec}^2 \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{cotg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha + \sec \alpha\,(1 + \operatorname{cosec} \alpha)$ en meer van dit slag b.v.: los op $\sec 3\alpha + \sec \alpha = \dfrac{2 \sec 3\alpha}{\sec 2\alpha}$?

---

[1]) Op mijn vraag in afl. V van de 29e jaargang, Korrel CX, blz. 249 kreeg ik geen enkel antwoord. Hetgeen volgt was al eerder geschreven.

Bij deze drie zal ik het maar laten.

In de vraagstukken van de eindexamens Gymnasium en Hogere Burgerschool komen ze zeer terecht niet voor; het Koninklijk Besluit van 1937 noemt ze niet. Waarom zouden ze ook? Ze worden immers onmiddellijk omgekeerd.

Secans en cosecans zijn stofnesten in de schoolwiskunde; dat verklaart hun lange leven. Dat ze maar volte en drukte geven voor niets, maar dan ook hoegenaamd niets, wat deert dat de sleur?

Secans en cosecans opruimen bij het middelbaar en gymnasiaal onderwijs als volslagen overbodig. Mee eens, lezer? Mag ik dan a.u.b. uw betuiging van instemming ontvangen?

Nochtans zullen de leiders van „Euclides" wel aan opponenten het woord willen verlenen, als ze willen betogen, dat secans en cosec nodig zijn, dat men ze niet kan ontberen, dat het ontbreken ervan het onderwijs in de driehoeksmeting ernstig zou schaden en wat ze nog meer te berde willen brengen.

P. WIJDENES.

KORREL CXV.

Het volgende is een vertaling van een passage uit het werk „Akhlâqe Jalâli" van de Perzische schrijver Jalâloddin Davâni, die in de eerste helft van de vijftiende eeuw in het Zuid-Perzische stadje Davân geboren werd. De tekst staat op blz. 151/2 van de Lucknow-editie van 1916.

Ter verduidelijking diene, dat de schrijver onderscheid maakt tussen „enkelvoudige domheid" en „samengestelde domheid". De laatste is de eigenschap van iemand, die zó dom is, dat hij zich inbeeldt de wijsheid in pacht te hebben, of, zoals de schrijver zegt, „die niet weet, en niet weet, dat hij niet weet".

Het beste geneesmiddel voor de samengestelde domheid, waarvan men nog enigszins nut verwachten kan, is, dat men degene, die daaraan lijdt, zich laat bezig houden met de wiskundige wetenschappen, zoals de meetkunde en de algebra, en dergelijke. Want in die vakken wordt het ware scherp gescheiden van het onjuiste en ijdele, en aan de verbeelding geen grote rol toebedeeld. Daardoor zal zijn ziel de genoegens van de zekerheid smaken, en daar hij ziet, dat hij die zekerheid en gemoedsrust moet ontberen, als hij zijn eigen overtuigingen en inbeeldingen de vrije loop laat, zal hij zich bewust worden van zijn eigen gebreken; zodat zijn domheid enkelvoudig wordt en althans de aanleg tot het verwerven van werkelijke kennis in hem geboren wordt.

A. OVERING, Den Haag.